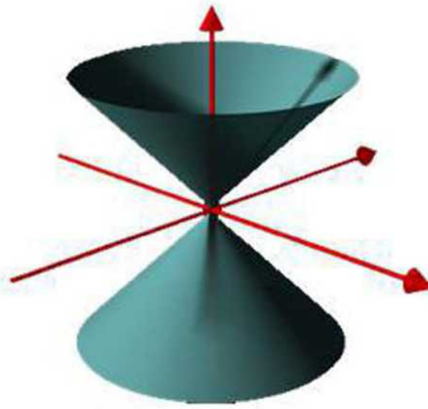
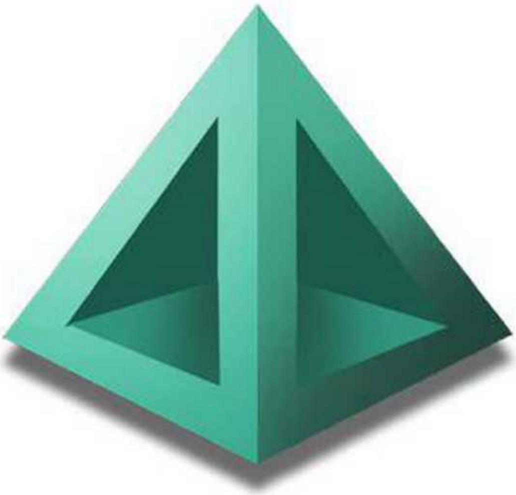
2017

رحلة التفوق في السادس
عطاءٌ بلا حدود





إعداد الأستاذ: عبدالكريم جبر

مساعد الطالب في الرياضيات للصف السادس العلمي

الفصل الرابع

التكامل

@رحلة التفوق في السادس

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون﴾

انطلاقا من قول المصطفى (ص): ((زكاة العلم نشرهُ وتعليمهُ))

تضع شبكة مواقع رحلة التفوق في السادس التعليمية التربوية الخيرية بين ايديكم احدى اعمالها من ملازم مرحلة السادس الأعدادي هذه المرحلة الهامة والمصيرية في حياة اعزائنا الطلبة وخاصة المتعففين منهم ولمن يتعذر عليه اقتناء هذه المساعدات المدرسية في محافظاتنا العراقية العزيزة بهدف النهوض وتطوير الواقع التعليمي ولو بالجزء اليسير.

إذ أن شبكتنا لاتقتصر على نشر الملازم المدرسية فقط أنما تقوم بنشر الدروس المرئية المجانية لأكفأ التدريسيين بالأضافة الى مجموعة قنواتنا التدريسية وكذلك الأرشادات والنصائح وطرق الدراسة الصحيحة هذا من جهة. أما من جهة أخرى فهو كسر لشوكة بعض المحسوبين على الكادر التدريسي ممن يرفضون نشر ملازمهم والتعاون مع ابنائهم الطلبة ليأخذوا من المال هدفا أهم ويتناسوا مصلحة الطالب والواقع التعليمي المتدني.

علماً ان كادر الشبكة والقائمين عليها هم مجموعة من الشباب العراقي الواعي المثقف بالأضافة الى تعاون بعض المدرسين الكرام كما واننا غير تابعين لأي جهة كانت رسمية او غير رسمية انما سر تجمعنا وعملنا هو خيري بحت آملين من الله عز وجل ان يوفقنا لتقديم كل ما هو صالح لشعبنا و وطننا الحبيب.

كادر شبكة رحلة التفوق في السادس

٢٠١٥/٨/٢١

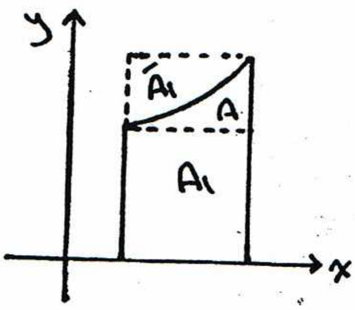


٠٧٨٠٣٠٠٢١٤٠
استاذ عبد الكريم جبر

« الفصل الرابع »

Integration التكامل

* ملاحظة
① القسم الأحيائي من صفحة ١١ ← النهاية
② القسم التطبيقي من صفحة ١٩ ← النهاية



لتكن f دالة مستمرة في الفترة $[a,b]$

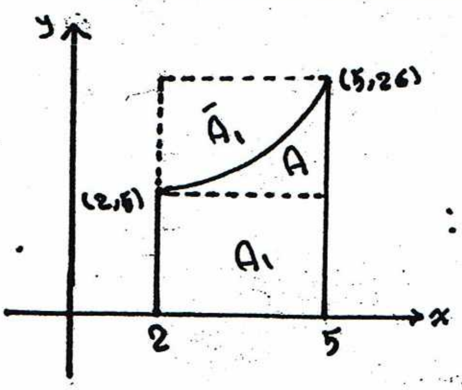
تسمى A مساحة المنطقة تحت المنحني f

وتسمى A_1 مساحة اكبر منطقة مستطيلة داخل المنحني

وتسمى $\bar{A}_1$ مساحة اصغر منطقة مستطيلة خارج المنحني

ولإيجاد المساحة A نقوم بإيجاد مساحة المستطيل A_1 ثم ايجاد مساحة المستطيل $\bar{A}_1$ و نطبق القاعدة $A = \frac{A_1 + \bar{A}_1}{2}$

س/ اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A = \{(x,y),\ 2 \leqslant x \leqslant 5,\ y = x^2+1\}$



x	y	(x,y)
2	5	(2,5)
5	26	(5,26)

$A_1 = (3)(5) = 15$

$\bar{A}_1 = (3)(26) = 78$

$\therefore A = \frac{A_1 + \bar{A}_1}{2} = \frac{15+78}{2} = \frac{93}{2} = 46\frac{1}{2}\ unit^2$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

والطول هو طول الفترة اي $5-2=3$

والعرض (الارتفاع) هو الاحداثي الصادي لكل مستطيل.

---

* تجزئة الفترة المغلقة $[a,b]$ ويرمز لها بالرمز (σ)

اولاً أما تعطى في السؤال مباشرة "وبواسطتها نقوم بتجزئة الفترة المعطاة الى فترات جزئية

س/ اكتب الفترات الجزئية للفترة $[1,5]$ اذا كانت عناصر التجزئة $\sigma = (1,2,3,4,5)$

$[\overset{a}{1}, \overset{b}{2}], [2,3], [3,4], [4,5]$

تبدأ من حيث ما انتهى

ثانياً لا تعطى التجزئة في السؤال و المطلوب تجزئة الفترة الى عدد معين نقوم بتطبيق القاعدة $\left(h = \frac{b-a}{n}\right)$

حيث h هو طول الفترة ، n هو عدد فترات التجزئة المطلوبة.

س/ جزئ الفترة الى اربعة تجزيئات منتظمة $[1,5]$ ($a=1$, $b=5$)

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{5-1}{4}=\frac{4}{4}=1 \Rightarrow \sigma=(1,2,3,4,5).$$

اربعة تجزيئات $[1,2]$ ، $[2,3]$ ، $[3,4]$ ، $[4,5]$

س/ جزئ الفترة الى تجزئتين منتظمة $[2,6]$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow \sigma=(2,4,6)$$

تجزئتين $[2,4]$ ، $[4,6]$

---

* مساحة منطقة مستوية بدقة اكبر

س2/ اوجد قيمة تقريبية للمنطقة الآتية باستخدام التجزئة

$A=\{(x,y): 2\le x\le 5,\ y=x^2+1\}$

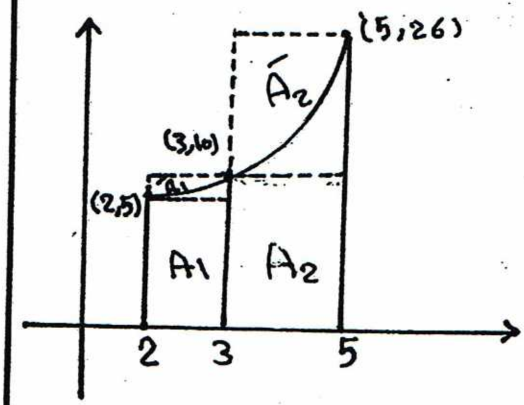
① $\sigma=(2,3,5)$

② $\sigma=(2,3,4,5)$

---

① $\sigma=(2,3,5) \Rightarrow [2,3]\ ,\ [3,5]$

x	y	(x,y)
2	5	(2,5)
3	10	(3,10)
5	26	(5,26)



$A_1=(1)(5)=5$
$A_2=(2)(10)=20$

$A_1+A_2=5+20=25\ unit^2$ مساحة المستطيلات تحت المنحني

$\acute{A}_1=(1)(10)=10$
$\acute{A}_2=(2)(26)=52$

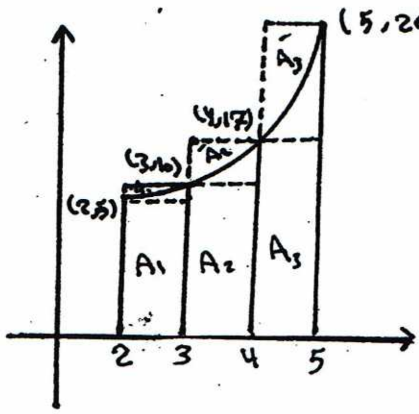
$\acute{A}_1+\acute{A}_2=10+52=62\ unit^2$ مساحة المستطيلات فوق المنحني

$$\therefore A=\frac{25+62}{2}=\frac{87}{2}=43\frac{1}{2}\ unit^2$$

القيمة التقريبية للمساحة.

② $\sigma=(2,3,4,5) \Rightarrow [2,3]\ ,\ [3,4]\ ,\ [4,5]$

x	y	(x,y)
2	5	(2,5)
3	10	(3,10)
4	17	(4,17)
5	26	(5,26)



$A_1=(1)(5)=5$
$A_2=(1)(10)=10$
$A_3=(1)(17)=17$

$A_1+A_2+A_3=5+10+17=32\ unit^2$ مساحة المستطيلات تحت المنحني

$\acute{A}_1=(1)(10)=10$
$\acute{A}_2=(1)(17)=17$
$\acute{A}_3=(1)(26)=26$

$\acute{A}_1+\acute{A}_2+\acute{A}_3=10+17+26=53\ unit^2$ مساحة المستطيلات فوق المنحني

$$\therefore A=\frac{32+53}{2}=42\frac{1}{2}\ unit^2$$ القيمة التقريبية

* المجاميع السفلى $L(\sigma, f)$ والمجاميع العليا $U(\sigma, f)$

$L(\sigma, f)$ هي مجموع مساحات المستطيلات تحت المنحني (Lower Rectangles)

$U(\sigma, f)$ هي مجموع مساحات المستطيلات فوق المنحني (Upper Rectangles)

س/ اوجد كلاً من المجموع الاسفل $L(\sigma, f)$ والمجموع الاعلى $U(\sigma, f)$ للدالة $f(x)=x^2+1$

$\sigma=(2,3,5)$, $f:[2,5] \longrightarrow R$

---

① نكتب عناصر التجزئة على شكل فترات $\sigma=(2,3,5) \Longrightarrow [2,3], [3,5]$

② نشتق الدالة مشتقة أولى ونساويها بالصفر $\acute{f}(x)=2x$, $\acute{f}(x)=0$

ونجد قيم x ونلاحظ هل أن قيم x تنتمي للفترة المعطاة أم لا سنوضح ذلك في الامثلة

$2x=0 \Rightarrow x=0 \notin [2,5]$

∴ الدالة لا تمتلك نقطة حرجة ضمن الفترة

③ نكتب الجدول كما موضح بسهولة حيث نقوم بتعويض عناصر كل فترة في الدالة المعطاة فالعدد الاصغر يوضع في حقل m_i والعدد الاكبر يوضع في حقل M_i

$h=b-a$

$[a,b]$	h	m_i	M_i	$h(m_i)$	$h(M_i)$
$[2,3]$	1	5	10	5	10
$[3,5]$	2	10	26	20	52
الفترة	طول الفترة	ارتفاع اصغر	ارتفاع اكبر	$L(\sigma,f)=25$	$U(\sigma,f)=62$
				مجموع اسفل	مجموع اعلى

فاذا كانت الفترة $[2,3]$ فان

$f(x)=x^2+1$

$f(2)=(2)^2+1=4+1=5$ توضع في حقل m_i

$f(3)=(3)^2+1=9+1=10$ توضع في حقل M_i

وهكذا بالنسبة للفترات الباقية.

س/ اوجد كلاً من المجموع الاسفل $L(\sigma, f)$ والمجموع الاعلى $U(\sigma, f)$ للدالة

$f(x)=3-x$, $f:[-2,1] \longrightarrow R$

ⓐ $\sigma=(-2,0,1)$

ⓑ تقسيم الفترة $[-2,1]$ الى ثلاث فترات جزئية منتظمة.

ⓐ $\sigma=(-2,0,1) \Longrightarrow [-2,0], [0,1]$

$\acute{f}(x)=-1$, $\acute{f}(x)=0 \Longrightarrow -1 \neq 0$

∴ الدالة لا تمتلك نقطة حرجة ضمن الفترة

$[a,b]$	h	m_i	M_i	$h(m_i)$	$h(M_i)$
$[-2,0]$	2	3	5	6	10
$[0,1]$	1	2	3	2	3
				$L(\sigma,f)=8$	$U(\sigma,f)=13$

ⓑ $h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow h = \frac{1-(-2)}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$\sigma = (-2, -1, 0, 1) \Rightarrow [-2,-1], [-1,0], [0,1]$

$\therefore$ لا توجد نقاط حرجة والدالة متناقصة $f'(x) = -1 \,,\, f'(x) = 0 \Rightarrow -1 \neq 0$

$[a,b]$	h	m_i	M_i	$h(m_i)$	$h(M_i)$
$[-2,-1]$	1	4	5	4	5
$[-1,0]$	1	3	4	3	4
$[0,1]$	1	2	3	2	3
				$L(\sigma,f) = 9$	$U(\sigma,f) = 12$

س/ جد $L(\sigma, f)$ ، $U(\sigma, f)$ للدالة $f(x) = 4x - x^2$ ، $f : [0,4] \longrightarrow R$
اذا كانت $\sigma = (0,1,2,3,4)$

$\sigma = (0,1,2,3,4) \Rightarrow [0,1], [1,2], [2,3], [3,4]$

$f'(x) = 4 - 2x \,,\, f'(x) = 0$

$4 - 2x = 0] \div 2 \Rightarrow 2 - x = 0$

$x = 2 \in [0,4]$

$x = 2 \in [0,4] <$ $2 \in [1,2]$ طرفية ، $2 \in [2,3]$ طرفية

$[a,b]$	h	m_i	M_i	$h(m_i)$	$h(M_i)$
$[0,1]$	1	0	3	0	3
$[1,2]$	1	3	4	3	4
$[2,3]$	1	3	4	3	4
$[3,4]$	1	0	3	0	3
				$L(\sigma,f) = 6$	$U(\sigma,f) = 14$

* ملاحظة

اذا كانت قيم x بعد الاشتقاق تنتمي للفترة الاصلية المعطاة في السؤال بعد ذلك نلاحظ الى اي فترة جزئية تنتمي

① اذا كانت قيمة x واقعة في طرف الفترة ليس لها تأثير في الحل كما في السؤال ←

② أما اذا كانت قيمة x واقعة في داخل الفترة الجزئية نقوم بتعويض القيم الثلاث اي طرفي الفترة وقيمة x بالدالة فالعدد الاكبر يوضع في حقل M_i والعدد الاصغر يوضع في حقل m_i والسؤال القادم يوضح ذلك .

س/ اذا كانت $f:[0,4] \longrightarrow R \ , \ f(x)=3x-x^2$

اوجد كل من $L(\sigma,f)$ ، $U(\sigma,f)$ مستخدماً اربعة تجزئيات منتظمة .

$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1 \ , \ \sigma=(0,1,2,3,4)$

$[0,1],[1,2],[2,3],[3,4].$

$\bar{f}(x)=3-2x \ , \ \bar{f}(x)=0 \ , \ 3-2x=0$

$2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}\in[0,4] \Longrightarrow \frac{3}{2}\in[1,2]$ نلاحظ ان قيمة x واقعة داخل الفترة الجزئية لذلك تدخل في الحل بأن نأخذ طرفي الفترة وقيمة x ونعوضها في الدالة الاصلية .

$[a,b]$	h	m_i	M_i	$h(m_i)$	$h(M_i)$
$[0,1]$	1	0	2	0	2
$\frac{3}{2}\in[1,2]$	1	2	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{9}{4}$
$[2,3]$	1	0	2	0	2
$[3,4]$	1	-4	0	-4	0
				$L(\sigma,f)=-2$	$U(\sigma,f)=\frac{25}{4}$

$f(x)=3x-x^2$

x	y	
1	2	أصغر قيمة
2	2	
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	أكبر قيمة

س/ اوجد كل من $L(\sigma,f)$ ، $U(\sigma,f)$ للدالة $f:[1,4]\longrightarrow R \ , \ f(x)=3x^2+2x$

ⓐ $\sigma=(1,2,4)$ ⓑ استخدام ثلاث تجزيئات متساوية

ⓐ $\sigma=(1,2,4) \Longrightarrow [1,2],[2,4]$

$\bar{f}(x)=6x+2 \ , \ \bar{f}(x)=0$

$6x+2=0 \Longrightarrow 6x=-2 \Longrightarrow x=\frac{-1}{3}\notin[1,4]$

∴ الدالة لا تحتوي على نقطة حرجة في الفترة $[1,4]$

$[a,b]$	h	m_i	M_i	$h(m_i)$	$h(M_i)$
$[1,2]$	1	5	16	5	16
$[2,4]$	2	16	56	32	112
				$L(\sigma,f)=32$	$U(\sigma,f)=128$

(b) $h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-1}{3}=\frac{3}{3}=1$, $\sigma=(1,2,3,4)$

$[1,2],[2,3],[3,4]$

[a,b]	h	mi	Mi	h(mi)	h(Mi)
[1,2]	1	5	16	5	16
[2,3]	1	16	33	16	33
[3,4]	1	33	56	33	56
				L(σ,f) = 54	U(σ,f) = 105

* ايجاد التكامل باستخدام التجزئة للفترة $\int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_a^b f(x)=\frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}$$

س/ لتكن $f:[1,3]\longrightarrow R$, $f(x)=x^2$ اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 x^2\,dx$ اذا اجزئت الفترة [1,3] الى تجزئتين .
وزاري

$h=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$, $\sigma=(1,2,3)$, $[1,2],[2,3]$

$f'(x)=2x$, $f'(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \notin [1,3]$

∴ الداله لاتمتلك نقط حرجه في الفترة [1,3]

[a,b]	h	mi	Mi	h(mi)	h(Mi)
[1,2]	1	1	4	1	4
[2,3]	1	4	9	4	9
				L(σ,f) = 5	U(σ,f) = 13

$$\int_1^3 x^2\,dx=\frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}=\frac{5+13}{2}=9\,unit^2$$ تقريباً

س/ اوجد قيمة التكامل $\int_2^4 (3x^2-3)\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma=(2,3,4)$
2015 / 3د

$\sigma=(2,3,4)\Rightarrow[2,3],[3,4]$

$f'(x)=6x$, $f'(x)=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow x=0\notin[2,4]$

∴ الدالة لاتمتلك نقط حرجة في الفترة [2,4]

[a,b]	h	mi	Mi	h(mi)	h(Mi)
[2,3]	1	9	24	9	24
[3,4]	1	24	45	24	45
				L(σ,f) = 33	U(σ,f) = 69

$$\int_2^4 (3x^2-3)\,dx = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}$$

$$= \frac{33+69}{2} = \frac{102}{2}$$

$$= 51\ unit^2$$ تقريباً

س/ اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^5 x^3\,dx$ باستخدام اربعة تجزيئات منتظمة.

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$, $\sigma = (1,2,3,4,5)$

$[1,2], [2,3], [3,4], [4,5]$

$\acute{f}(x) = 3x^2$, $\acute{f}(x)=0 \Rightarrow 3x^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \notin [1,5]$

∴ الدالة لا تمتلك نقطة حرجة في الفترة $[1,5]$.

[a,b]	h	mi	Mi	h(mi)	h(Mi)
[1,2]	1	1	8	1	8
[2,3]	1	8	27	8	27
[3,4]	1	27	64	27	64
[4,5]	1	64	125	64	125
				L(σ,f) = 100	U(σ,f) = 224

$$\int_1^5 x^3\,dx = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}$$

$$= \frac{100+224}{2} = \frac{324}{2}$$

$$= 162\ unit^2$$ تقريباً

س/ اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x}\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma=(1,2,3)$

$[1,2], [2,3]$, $f(x) = \frac{3}{x} \Rightarrow f(x) = 3x^{-1} \Rightarrow \acute{f}(x) = -3x^{-2}$

$\acute{f}(x) = \frac{-3}{x^2}$, $\acute{f}(x)=0 \Rightarrow \frac{-3}{x^2}=0 \Rightarrow -3 \neq 0$ الدالة لا تمتلك نقطة حرجة في الفترة $[1,3]$

[a,b]	h	mi	Mi	h(mi)	h(Mi)
[1,2]	1	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{3}{2}$	3
[2,3]	1	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
				L(σ,f) = $\frac{5}{2}$	U(σ,f) = $\frac{9}{2}$

$$\int_1^3 \frac{3}{x}\,dx = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}$$

$$= \frac{\frac{5}{2}+\frac{9}{2}}{2}$$

$$= \frac{\frac{14}{2}}{2} = \frac{7}{2}$$ تقريباً

* ايجاد قيمة تقريبية للتكامل ثم التحقق هندسياً

أن التحقق هندسياً يخص الدوال من الدرجة الاولى والدوال الثابتة

ملاحظة:

① عندما لا يذكر التجزئة في السؤال وكانت الدالة ثابتة أو الدالة من الدرجة الاولى يمكنك اختيار اي تجزئة كانت فالحل يكون واحد.

② الدوال الثابتة والدوال من الدرجة الاولى تعطي تكاملاً مضبوطاً وليس تقريبي (مساحة مضبوطة)

س/ لتكن $f:[1,4] \longrightarrow R$ ، $f(x)=3x-3$ اوجد قيمة التكامل $\int_1^4 f(x)\,dx$ باستخدام التجزئة $(1,2,3,4)=\sigma$ ثم تحقق هندسياً بحساب مساحة المنطقة تحت المنحني f.

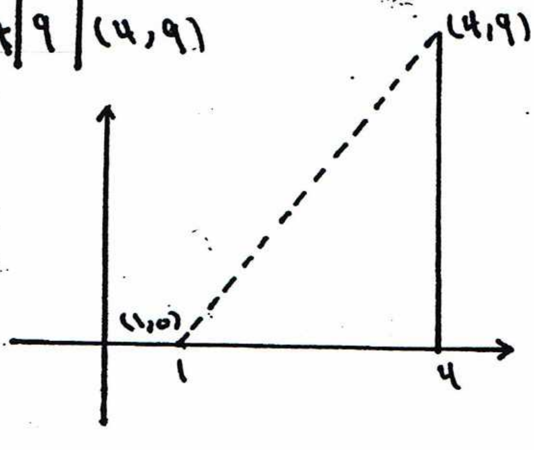
$[1,2],[2,3],[3,4]$ ، $f'(x)=3$ ، $f'(x)=0 \Longrightarrow 3 \neq 0$

∴ الدالة لا تمتلك نقطة حرجة

$[a,b]$	h	m_i	M_i	$h(m_i)$	$h(M_i)$
$[1,2]$	1	0	3	0	3
$[2,3]$	1	3	6	3	6
$[3,4]$	1	6	9	6	9
				$L(\sigma,f)=9$	$U(\sigma,f)=18$

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2} = \frac{9+18}{2} = \frac{27}{2}\ \text{Unit}^2$$

x	y	(x,y)
1	0	(1,0)
4	9	(4,9)



التحقق هندسياً

① نعوض نقاط الفترة الاصلية في الدالة

② نعين النقاط الناتجة في الرسم الاحداثي ونصل بينها وبين المحور السيني بمستقيم عمودي

③ نصل بمستقيم بين النقطتين فيكون الشكل الناتج اما مثلث او مستطيل او شبه منحرف او مربع ونطبق قانون المساحة حسب الشكل الناتج

$A = \frac{1}{2}$ (القاعدة)(الارتفاع) مساحة المثلث

$= \frac{1}{2}(3)(9) = \frac{27}{2}\ \text{Unit}^2$

س/ لتكن $f(x)=2x-3$, $f:[2,5]\to R$ اوجد قيمة التكامل $\int_2^5 f(x)\,dx$
ثم تحقق هندسياً بحساب مساحة المنطقة تحت المنحني f

* لم يحدد عناصر التجزئة ممكن اختيار اي تجزئة ضمن الفترة المعطاة $[2,5]$
راجع (ص) ملاحظة ①

∴ نفرض عناصر التجزئة $\sigma=(2,3,5)$

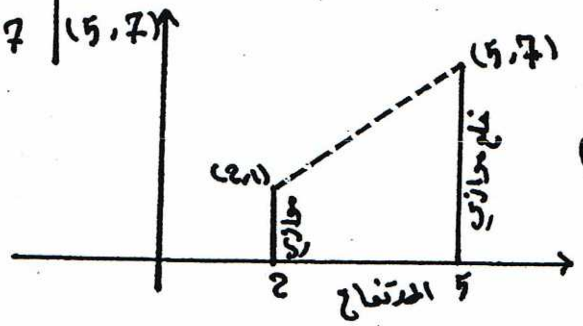
$[2,3],[3,5]$, $f'(x)=2$, $f''(x)=0 \Rightarrow 2\neq 0$

∴ الدالة لا تمتلك نقطة حرجة

[a,b]	h	mi	Mi	h(mi)	h(Mi)
[2,3]	1	1	3	1	3
[3,5]	2	3	7	6	14
				L(σ,f) = 7	U(σ,f) = 17

$$\int_2^5 f(x)\,dx=\frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}=\frac{7+17}{2}=\frac{24}{2}=12\ unit^2$$

x	y	(x,y)
2	1	(2,1)
5	7	(5,7)



التحقق هندسياً

الشكل الناتج هو شبه منحرف

$A=\frac{1}{2}$ (مجموع طولي الضلعين المتوازيين) (الارتفاع)

$=\frac{1}{2}(7+1)(3)$

$=\frac{1}{2}(8)(3)=12\ unit^2$

س/ لتكن $f(x)=3$, $f:[1,5]\to R$ اوجد $\int_1^5 f(x)\,dx$ ثم تحقق هندسياً
بحساب المنطقة تحت المنحني f.

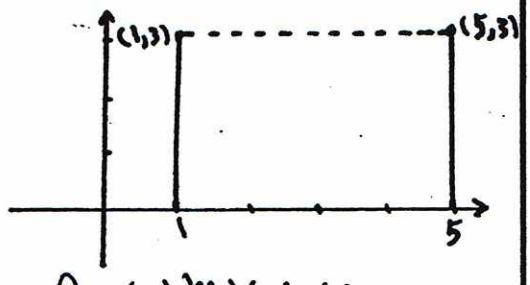
* لم يحدد عناصر التجزئة لذلك نختار اي تجزئة ضمن الفترة المعطاة $[1,5]$

∴ نفرض عناصر التجزئة $\sigma=(1,3,5)$

$[1,3]$, $[3,5]$

التحقق هندسياً

x	y	(x,y)
1	3	(1,3)
5	3	(5,3)



[a,b]	h	mi	Mi	h(mi)	h(Mi)
[1,3]	2	3	3	6	6
[3,5]	2	3	3	6	6
				L(σ,f) = 12	U(σ,f) = 12

$$\int_1^5 f(x)\,dx=\frac{12+12}{2}=12\ unit^2$$

مساحة المستطيل $A=$ (الطول)(العرض)

$=(4)(3)=12\ unit^2$

س/ لتكن $f(x)=-4$ ، اوجد قيمة التكامل $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$

$[-3,2] \longrightarrow R$ ثم تحقق هندسياً

* لم يحدد عناصر التجزئة ممكن اختيار اي تجزئة ضمن الفترة المعطاة $[-3,2]$

∴ نفرض عناصر التجزئة $\sigma=(-3,0,2)$

$[-3,0],[0,2]$

$[a,b]$	h	m_i	M_i	$h(m_i)$	$h(M_i)$
$[-3,0]$	3	-4	-4	-12	-12
$[0,2]$	2	-4	-4	-8	-8
				$L(\sigma,f)=-20$	$U(\sigma,f)=-20$

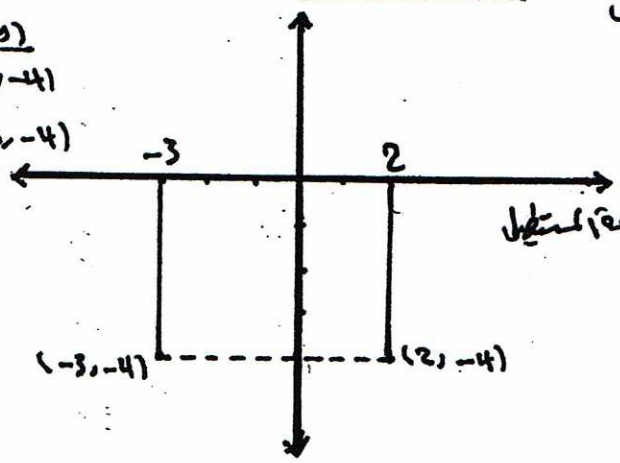
$$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx=\frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}$$

$$=\frac{-20-20}{2}$$

$$\left|\int_{-3}^{2} f(x)\,dx\right|=\left|-20\right|=20\ unit^2$$

وضعنا قيمة مطلقة لان المساحة من غير الممكن أن تكون سالبة

x	y	(x,y)
2	-4	$(2,-4)$
-3	-4	$(-3,-4)$



مساحة المستطيل $A=$ (العرض)(الطول)

$=(5)(4)$

$=20\ unit^2$

واجب

س/ لتكن $f(x)=3x+3$ ، $f:[-1,3]\longrightarrow R$ جد قيمة $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ باستخدام التجزئة $\sigma=(-1,0,3)$ ثم تحقق من صحة الناتج هندسياً. $[24\ unit^2]=$ ج.

س2/ لتكن $f(x)=12-2x$ ، $[2,5]\longrightarrow R$ اوجد قيمة $\int_{2}^{5} f(x)\,dx$ ثم تحقق هندسياً من صحة الناتج $[15\ unit^2]=$ ج.

س3/ $\frac{2012}{1}$ لتكن $f:[1,3]\longrightarrow R$ حيث $f(x)=2x^2$ جد قيمة تقريبية للتكامل $\int_{1}^{3} f(x)\,dx$ ، اذا قسمت الفترة $[1,3]$ الى جزئيتين منتظمتين $[18\ unit^2]=$ ج.

س4/ لتكن $f(x)=3$ ، $f:[1,5]\longrightarrow R$ جد قيمة $\int_{1}^{5} f(x)\,dx$ ثم تحقق هندسياً من صحة الناتج. $[12\ unit^2]=$ ج.

* التكامل غير المحدد $\int f(x)\,dx$

التكامل هو عكس الاشتقاق
اي هو عملية عكسية للتفاضل يراد بها ايجاد دالة علمت مشتقتها
(اي انها عملية ارجاع المشتقة الى دالتها الاصلية)
وهناك نوعان من التكامل هما التكامل غير المحدد والتكامل المحدد
اولاً التكامل غير المحدد ويكون رمز التكامل هو $\int$ وهذا أول حرف من كلمة Summe والتي تعني مجموع مساحات.

قواعد التكامل
dx دليل التكامل
C ثابت التكامل

اولاً $\int 1\,dx = 1x + C$

Ex
① $\int 5\,dx = 5x + C$
② $\int -3\,dy = -3y + C$

ثانياً $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , n \neq -1$

Ex
① $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$
② $\int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$
③ $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

نحول الدالة الجذرية الى أسية ثم التكامل

يمكن الاستغناء عن هذه الخطوة بأن نضع مقلوب الاس في بداية الحل

ثالثاً $\int \underset{\text{ثابت}}{a}\,x^n\,dx = a\int x^n\,dx = a\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Ex
① $\int 3x^4\,dx = 3\int x^4\,dx = 3\frac{x^5}{5} + C = \frac{3}{5}x^5 + C$
② $\int 4x^{-5}\,dx = 4\int x^{-5}\,dx = 4\frac{x^{-4}}{-4} + C = -x^{-4} + C$

③ $\int 6x^7 dx = 6\int x^7 dx = \overset{3}{\cancel{6}}\,\frac{x^8}{\cancel{8}_4} + c = \frac{3}{4}x^8 + c$

ممكن عدم كتابة هذه الخطوة

④ $\int 5\,x^{\frac{3}{7}} dx = \cancel{5}\cdot\frac{7}{\cancel{10}_2}\,x^{\frac{10}{7}} + c = \frac{7}{2}x^{\frac{10}{7}} + c$

رابعاً التكامل يتوزع على الجمع والطرح بشرط أن يكون أس القوس واحد.

Ex جد التكاملات الآتية

① $\int (x^3 - 6x^2 + 3)^1 dx$

$= \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 3\, dx$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{\overset{2}{\cancel{6}}x^3}{\cancel{3}} + 3x + c = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 3x + c$

② $\int (x^{-3} - 2)^1 dx = \int x^{-3} dx - \int 2\, dx = \frac{x^{-2}}{-2} - 2x + c$

ممكن عدم كتابة هذه الخطوة

$= \frac{-1}{2x^2} - 2x + c$

والتكامل يكون لكل حد من حدود الدالة مباشر بشرط أن يكون أس القوس واحد.

③ $\int (x-2)(3x-1) dx$

* التكامل لا يتوزع على الضرب والقسمة لذلك يجب فتح الاقواس

$= \int (3x^2 - x - 6x + 2)\, dx$ جمع الحدود المتشابهة

$= \int (3x^2 - 7x + 2)^1 dx = \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}_1} - \frac{7x^2}{2} + 2x + c$

$= x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + c$

④ $\int \sqrt{x}\,(x + 6)\, dx = \int (x\sqrt{x} + 6\sqrt{x})\, dx$

$= \int (x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}})\, dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}})\, dx$

عند الضرب نجمع الاسس.

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \overset{2}{\cancel{6}}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}} + c$

⑥ $\int \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^2\,dx$

نفتح القوس كمربع حدانيه ثم ندخل خارج القوس حيث لا نقوم بتحويل الجذور الى داله أسيه ألا بعد اتمام عمليه الضرب

$= \int \sqrt{x}\,(x+4\sqrt{x}+4)\,dx$

$= \int (x\sqrt{x}+4x+4\sqrt{x})\,dx$

$= \int (x\cdot x^{\frac{1}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}})\,dx$

$= \int (x^{\frac{3}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}})\,dx$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{4x^2}{2}+4\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^2+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$

---

⑦ $\int \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\,dx$

* لايجاد تكامل حاصل قسمة دالتين نحاول تحليل الدالتين او احداهما بحثاً عن اختصارات ممكنة. وفي حالة تعذر ذلك فاننا نقوم برفع المقام الى البسط بصورة تغير الاشارة

$= \int x^{-2}(2x^3-4x^2+5)\,dx$

$= \int (2x-4+5x^{-2})\,dx$

$= \frac{2x^2}{2}-4x+\frac{5x^{-1}}{-1}+c$

$= x^2-4x-\frac{5}{x}+c$

$x^{-2}\cdot 4x^2$
$= 4x^0$
$= 4$

---

⑧ $\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}\,dx$

$= \int \frac{4x^4-12x^2+9-9}{x^2}\,dx$

$= \int x^{-2}(4x^4-12x^2)\,dx$

$= \int (4x^2-12)\,dx$

$= \frac{4x^3}{3}-12x+c$

⑨ $\int \frac{(x^3-1)}{(x-1)^1}\,dx$ نحلل البسط فرق بين مكعبين ⇐ $(\sqrt[3]{ح_1}$ بإشارة الوسط $\sqrt[3]{ح_2})(ح_1^2$ عكس الإشارة $ح_1 \times ح_2 + ح_2^2)$

ملاحظة: مهمة جداً"
* اذا كان أس قوس في المقام واحد لا نقوم برفعه الى البسط

$= \int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}\,dx$

$= \int (x^2+x+1)^1\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$

---

⑩ $\int \frac{x^4-1}{x-1}\,dx$ نحلل البسط فرق بين مربعين ⇐ $(\sqrt{ح_1} - \sqrt{ح_2})($نفس القوس عكس الإشارة$)$

$= \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)}\,dx = \int \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)}\,dx$

$= \int (x+1)(x^2+1)\,dx = \int (x^3+x+x^2+1)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x + c$

---

⑪ $\int \frac{(x-5)^3}{2x-10}\,dx$

عامل مشترك المقام

$= \int \frac{(x-5)^{3\,2}}{2(x-5)}\,dx = \int \frac{(x-5)^2}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}(x-5)^2\,dx$

$= \int \frac{1}{2}(x^2-10x+25)^1\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - 5x^2 + 25x\right) + c$ $\qquad \frac{10x^2}{2} = 5x^2$

---

⑫ $\int \frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}\,dx$ تحليل بالتجربة

$= \int \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)}\,dx = \int (\sqrt{x}-2)\,dx = \int (x^{\frac{1}{2}}-2)^1\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + c$

خامساً $\int ($داله$)^n($مشتقه داخل القوس$)\,dx = \frac{(\text{داله})^{n+1}}{n+1} + c$

اذا كانت مشتقه داخل القوس كامله ليس فيها نقص — تهمل المشتقه

بشرط أن لا يكون $n = -1$

اي أن عند وجود داله ووجود مشتقه داخل القوس كامله جنبها فيكون التكامل بأن

① نهمل المشتقه ② يضاف الى أس القوس واحد ويقسم على الاس الجديد .

جد التكاملات الاتية

① $\int (x^2+4)^5\,2x\,dx$ ($2x$: مشتقه داخل القوس تهمل)

Let $y = x^2+4$ داخل القوس

$\bar{y} = 2x$ مشتقه داخل القوس كامله

$= \frac{(x^2+4)^6}{6} + c$

② $\int \frac{(3x^2-4x)}{(x^3-2x^2)^4}dx$

* اذا كان أس القوس في المقام ٢ غير الواحد ممكن رفعه للبسط

$= \int (x^3-2x^2)^{-4}\underbrace{(3x^2-4x)}_{\text{المشتقة تكمل}}dx$

نرفع القوس الى البسط اولاً

Let $y = x^3-2x^2$

$\bar{y} = 3x^2-4x$

مشتقة داخل القوس كاملة

$= \frac{(x^3-2x^2)^{-3}}{-3} + C$

---

③ $\int (4x^2-5)^6\, x\, dx$

* في حالة وجود نقص في مشتقة داخل القوس والنقص بشرط ثابت نضع النقص للمشتقة ونضع مقلوبه خارج التكامل.

$= \frac{1}{8}\int (4x^2-5)^6\, 8x\, dx$

المشتقة تكمل

Let $y = (4x^2-5)$

$\bar{y} = 8x$

هناك نقص لمشتقة داخل القوس هو العدد 8 نضعه للمشتقة ونضع مقلوبه $\frac{1}{8}$ خارج التكامل

$= \frac{1}{8}\cdot\frac{(4x^2-5)^7}{7} + C$

$= \frac{1}{56}\cdot(4x^2-5)^7 + C$

---

④ $\int \frac{(\sqrt{x}-3)^5}{\sqrt{x}}dx$

$= \int (\sqrt{x}-3)^5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

Let $y = (\sqrt{x}-3)$

$\bar{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$

$= 2\int (\sqrt{x}-3)^5\, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

المشتقة تكمل

هناك نقص هو $\frac{1}{2}$ نضعه للمشتقة ونضع مقلوبه وهو 2 خارج التكامل

$= \not{2}\frac{(\sqrt{x}-3)^6}{\not{6}\,3} + C = \frac{1}{3}(\sqrt{x}-3)^6 + C$

---

⑤ $\int (3x^2+8x+5)^4(3x+4)dx$

Let $y = 3x^2+8x+5$

$\bar{y} = 6x+8$

$= \frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^4\,[2(3x+4)]dx$

مشتقة تكمل

نقوم باخراج عامل مشترك لكي نعرف ما هو النقص

$\bar{y} = 2(3x+4)$

النقص في المشتقة العدد 2

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(3x^2+8x+5)^5}{5} + C = \frac{1}{10}(3x^2+8x+5)^5 + C$

---

⑥ $\int (x^2-4x)^5\cdot(4-2x)dx$

Let $y = x^2-4x$

$\bar{y} = 2x-4$

$= -1\int (x^2-4x)^5\cdot\underbrace{[-1(4-2x)]}_{\text{مشتقة تكمل}}dx$

المقدار نفسه لكن مختلف في الاشارة فقط لذلك نضع المشتقة لخارج القوس اشارة سالبة ونضعها خارج التكامل ايضاً

$= -\frac{(x^2-4x)^6}{6} + C$

⑦ $\int (2x - x^2 + 1)^3 (x-1)\,dx$

Let $y = 2x - x^2 + 1$

$\bar{y} = 2 - 2x$

$\bar{y} = 2(1 - x)$

$= \frac{-1}{2} \int (2x - x^2 + 1)^3 \cdot [-2(x-1)]\,dx$ مشتقة تهمل

$= \frac{-1}{2} \frac{(2x - x^2 + 1)^4}{4} + C$

$= \frac{-1}{8} (2x - x^2 + 1)^4 + C$

النقص هو العدد (2) والإشارة السالبة اي مختلف في الإشارة لذلك نضع (2-) المشتقة ونضع مقلوبها $(\frac{-1}{2})$ خارج التكامل

---

⑧ $\int \frac{2x+3}{\sqrt{(2x^2+6x+1)}}\,dx$

Let $y = 2x^2 + 6x + 1$

$\bar{y} = 4x + 6$

$\bar{y} = 2(2x+3)$ عامل مشترك

$= \int (2x^2 + 6x + 1)^{\frac{-1}{2}} \cdot (2x+3)$

$= \frac{1}{2} \int (2x^2 + 6x + 1)^{\frac{-1}{2}} \cdot [2(2x+3)]\,dx$ مشتقة تهمل

النقص هو العدد (2)

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} (2x^2 + 6x + 1)^{\frac{1}{2}} + C = (2x^2 + 6x + 1)^{\frac{1}{2}} + C$

مقلوب الاس الجديد

---

⑨ $\int \sqrt[3]{x^2 + 10x + 25}\,dx$

* اذا لم تعطى مشتقة داخل القوس او مشتقة داخل الجذر نهائياً نقوم في هذه الحالة بتغير في شكل السؤال (اي في داخل القوس او الجذر) بأن نوفر المشتقة عن طريق التحليل بإخراج عامل مشترك او مربع كامل او عن طريق توحيد المقامات او توحيد الاساس ------

تحليل المربع الكامل $(\sqrt{ح_1}$ إشارة الوسط $\sqrt{ح_3})^2$

$= \int \sqrt[3]{(x+5)^2}\,dx$ مربع كامل

$= \int (x+5)^{\frac{2}{3}}\,dx$ Let $y = x + 5$, $\bar{y} = 1$

$= \frac{3}{5} (x+5)^{\frac{5}{3}} + C$ مشتقة داخل القوس كاملة

---

⑩ $\int \frac{1}{(x^2 - 14x + 49)}\,dx$ اس قوس المقام واحد لا يرفع للبسط

Let $y = x - 7$

$\bar{y} = 1$

$= \int \frac{1}{(x-7)^2}\,dx = \int (x-7)^{-2}\,dx = \frac{(x-7)^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{(x-7)} + C$

مربع كامل — اس قوس المقام اثنان ممكن رفعه

---

⑪ $\int \sqrt{x^2 - 2x + 1}\,dx$

* عند أخذ الجذر التربيعي نضع إشارة موجبة وسالبة

$\int \sqrt{(x-1)^2}\,dx = \int \pm(x-1)\,dx$ مربع كامل

$= \pm(\frac{x^2}{2} - x) + C$ طريقة اولى للتكامل

$= \pm \frac{(x-1)^2}{2} + C$ طريقة ثانية للتكامل

⑫ $\int (4x^2+12x+9)^4\,dx$ — قاعدة الرفع $2\times4=8$

Let $y=2x+3$

$y'=2$

$= \int [(2x+3)^2]^4\,dx = \int (2x+3)^8\,dx$ (مربع كامل)

النقص العدد 2

$= \frac{1}{2}\int (2x+3)^8 (2)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3)^9}{9} + c = \frac{1}{18}(2x+3)^9 + c$ (مشتقه مكمل)

---

⑬ $\int \sqrt[7]{2x^9-3x^7}\,dx$

* مشتقه داخل الجذر غير موجودة لذلك نقوم باستخراج عامل مشترك داخل الجذر ثم توزيع الجذر وأخذ الجذر للعامل المشترك وتحويل الجذر الآخر الى حالة أسية ثم نجري عملية التكامل.

$= \int \sqrt[7]{x^7(2x^2-3)}\,dx$ (عامل مشترك)

$= \int \sqrt[7]{x^7}\cdot\sqrt[7]{(2x^2-3)}\,dx = \int (2x^2-3)^{\frac{1}{7}}x\,dx$ Let $y=2x^2-3$

$= \frac{1}{4}\int (2x^2-3)^{\frac{1}{7}}(4x)\,dx$ (مشتقة مكمل) $y'=4x$

النقص هو العدد (4)

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8}(2x^2-3)^{\frac{8}{7}} + c = \frac{7}{32}(2x^2-3)^{\frac{8}{7}} + c$

عامه

⑭ $\int \sqrt[3]{(3x^3-5x^5)}\,dx$

Let $y=3-5x^2$

$y'=-10x$

$= \int \sqrt[3]{x^3(3-5x^2)}\,dx = \int \sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{(3-5x^2)}\,dx$ (عامل مشترك) النقص العدد (-10)

$= \int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\cdot x\,dx = \frac{-1}{10}\int (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\cdot(-10x)\,dx$ (مشتقة مكمل)

$= \frac{-1}{10}\cdot\frac{3}{4}(3-5x)^{\frac{4}{3}} + c = \frac{-3}{40}(3-5x)^{\frac{4}{3}} + c$

---

⑮ $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx = \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$ (عامل مشترك) تحويل الجذور الى حالة أسية

$= \int (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{-3}{4}}\,dx = \int x^{\frac{1}{4}}((1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{-3}{4}}\,dx$

عند الضرب نجمع الاسس ⟵ $\frac{1}{4}-\frac{3}{4}$

Let $y=1-x^{\frac{1}{2}}$

$= \int (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{-1}{2}}$ $y' = -\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$ $=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$ الاس

نقص هو $(\frac{-1}{2})$

$= -2\int (1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\cdot(\frac{-1}{2}x^{\frac{-1}{2}}) = -2\cdot\frac{2}{3}(1-x^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}} + c = \frac{-4}{3}(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + c$

(16) $\int (x^2-3)^5 \, 3x \, dx$

Let $y = x^2-3$

$\bar{y} = 2x$

النقص هو العدد (2)

* العدد (3) ليس له علاقة بمشتقة داخل القوس لذلك يسحب خارج التكامل

$= 3\int (x^2-3)^5 \, x \, dx$

$= 3 \cdot \frac{1}{2} \int (x^2-3)^5 \, \underbrace{2x \, dx}_{\text{تحل}}$

$= \frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{(x^2-3)^6}{\cancel{6}_2} + C = \frac{1}{4}(x^2-3)^6 + C$

---

(17) $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}} \, dx$

Let $y = 3-\sqrt{5x}$

$y = 3-\sqrt{5}\cdot\sqrt{x}$

$\bar{y} = -\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\bar{y} = \frac{-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

النقص هو العدد $\left(\frac{-\sqrt{5}}{2}\right)$

$= \int (3-\sqrt{5x})^7 \cdot \frac{1}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{x}} \, dx$

سحب العدد $\frac{1}{\sqrt{7}}$ خارج التكامل

$= \frac{1}{\sqrt{7}} \int (3-\sqrt{5x})^7 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{5}} \int (3-\sqrt{5x})^7 \cdot \underbrace{\left(\frac{-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx}_{\text{مشتقة تحل}}$

$= \frac{-\cancel{2}}{\sqrt{35}} \cdot \frac{(3-\sqrt{5x})^8}{\cancel{8}_4} + C = \frac{-1}{4\sqrt{35}}(3-\sqrt{5x})^8 + C$

---

(18) 2 / 2016 / د2

$\int \frac{1}{\sqrt{2x}\cdot\sqrt{3+\sqrt{x}}} \, dx$

Let $y = 3+\sqrt{x}$

$\bar{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\bar{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

نقص هو العدد $\frac{1}{2}$

$= \int (3+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}} \, dx$

سحب $\frac{1}{\sqrt{2}}$ خارج التكامل.

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int (3+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1} \int (3+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx}_{\text{مشتقة تحل}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} (3+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} + C$

مقلوب الاس الجديد

$= 2\sqrt{2}(3+\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} + C$

$\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1}$

$= \frac{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{1}$

$= 2\sqrt{2}$

جد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int (3x^2+1)^2 dx$ مشتقة داخل القوس غير موجودة نقوم بفتح القوس

$= \int (9x^4 + 6x^2 + 1) dx = \frac{9x^5}{5} + \frac{6x^3}{3} + x + c = \frac{9}{5}x^5 + 2x^3 + x + c$

---

② وزاري 2015 د2 $\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}} dx$

$= \int (x-2)^{\frac{-1}{3}} (3x-6) dx = \int (x-2)^{\frac{-1}{3}} 3(x-2) dx$ عامل مشترك — عند الضرب تجمع الأسس $\frac{-1}{3}+1 = \frac{2}{3}$

$= \int 3(x-2)^{\frac{2}{3}} dx = 3\int (x-2)^{\frac{2}{3}} dx = 3 \cdot \frac{3}{5}(x-2)^{\frac{5}{3}} + c = \frac{9}{5}(x-2)^{\frac{5}{3}} + c$

---

③ وزاري $\int (2x^6 - 3x)^4 dx$

$= \int [(2x^6 - 3x)]^4 dx = \int [x(2x^5-3)]^4 dx$ عامل مشترك — الاس يتوزع عند الضرب والقسمة

$= \int x^4 (2x^5-3)^4 dx = \frac{1}{10}\int (2x^5-3)^4 \cdot (10x^4) dx$ مشتقة تكمل — Let $y = 2x^5 - 3$, $y' = 10x^4$

$= \frac{1}{10} \cdot \frac{(2x^5-3)^5}{5} + c = \frac{1}{50}(2x^5-3)^5 + c$

---

④ وزاري $\int x^6 (5 - \frac{3}{x})^6 dx$

$= \int [x(5-\frac{3}{x})]^6 dx = \int [x(5 - \frac{3}{x})]^6 dx = \int (5x-3)^6 dx$ الاس يتوزع عند الضرب والقسمة

$= \frac{1}{5}\int (5x-3)^6 \cdot (5) dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x-3)^7}{7} + c = \frac{1}{35}(5x-3)^7 + c$

---

⑤ وزاري $\int \frac{(x^2-x)^{10}}{x^{10}} dx$

$= \int [\frac{x^2-x}{x}]^{10} dx = \int [\frac{x(x-1)}{x}]^{10} dx = \int (x-1)^{10} dx = \frac{(x-1)^{11}}{11} + c$ عامل مشترك

طريقة أخرى للحل
$= \int \frac{(x^2-x)^{10}}{x^{10}} dx = \int \frac{[(x^2-x)]^{10}}{x^{10}} dx = \int \frac{[x(x-1)]^{10}}{x^{10}} dx$ الاس

$= \int \frac{x^{10}(x-1)^{10}}{x^{10}} dx = \int (x-1)^{10} dx = \frac{(x-1)^{11}}{11} + c$

⑨ $\int \frac{2(x-1)^4}{(x+1)^6}\,dx$

$= \int \frac{(x-1)^4}{(x+1)^4}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}\,dx = \int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \cdot \frac{2}{(x+1)^2}\,dx$ Let $y = \frac{x-1}{x+1}$

مشتقة داخل القوس تهمل

$\acute{y} = \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}$

$\acute{y} = \frac{x+1-x+1}{(x+2)^2}$

$= \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5}{5} + c$

مشتقة داخل القوس سوية $\acute{y} = \frac{2}{(x+2)^2}$

واجب

س/ جد التكاملات الآتية

① $\int \frac{1}{9-12x+4x^2}\,dx$ $\quad [\frac{1}{2(3-2x)} + c] = 2.$

② $\int \frac{x^5+x^2}{x^2-x+1}\,dx$ $\quad [\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + c] = 2.$

③ $\int \frac{(x^3+x^2)^3}{x^6}\,dx$ $\quad [\frac{(x+1)^4}{4} + c] = 2.$

④ $\int \frac{(x^2-9)^4}{(x-3)^4}\,dx$ $\quad [\frac{(x+3)^5}{5} + c] = 2.$

⑤ $\int \frac{x^3}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx$ $\quad [\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c] = 2.$

⑥ $\int x\sqrt[3]{\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^2}}\,dx$ $\quad [\frac{-3}{4}(3-x)^{\frac{4}{3}} + c] = 2.$

⑦ $\int [(4x+6)\sqrt{2x+3}\,]\,dx$ $\quad [\frac{2}{5}(2x+3)^{\frac{5}{2}} + c] = 2.$

⑧ $\int \frac{2x-6}{\sqrt{3-x}}\,dx$ $\quad [\frac{4}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}} + c] = 2.$

⑨ $\int \frac{1}{x^2}\left(\frac{2-3x}{x}\right)^7 dx$ $\quad [-\frac{1}{16}\left(\frac{2-3x}{x}\right)^8 + c] = 2.$

⑩ $\int \frac{(2x^2-3x)^4}{x^4}\,dx$ $\quad [\frac{1}{10}(2x-3)^5 + c] = 2.$

⑪ $\int x^4\left(\frac{1}{x} - 5\right)^4 dx$ $\quad [\frac{-1}{25}(1-5x)^5 + c] = 2$

* التكامل الجبري المحدد:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

في التكامل المحدد لا يكتب ثابت التكامل C .

س: جد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int_1^2 (4x^3 + 2x)\,dx$

$= \left[\frac{4x^4}{4} + \frac{2x^2}{2}\right]_1^2 = [x^4 + x^2]_1^2$ (أعلى 2، أسفل 1)

$=$ [تعويض الاعلى] $-$ [تعويض الاسفل]

$= [(2)^4 + (2)^2] - [(1)^4 + (1)^2]$

$= [16 + 4] - [1 + 1] = 20 - 2 = 18$

② $\int_1^4 (x-2)(x+1)^2\,dx$

نفتح أقواس مربع الحدانية

$= \int_1^4 (x-2)(x^2+2x+1)\,dx = \int (x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2)\,dx$

$= \int_1^4 (x^3 - 3x - 2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_1^4$

$= \left[\frac{256}{4} - \frac{48}{2} - 8\right] - \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2\right] = [64 - 24 - 8] - \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2\right]$

$= 32 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{34}{1} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{136 - 1 + 6}{4} = \frac{141}{4}$

* الدالة التي تحتوي على مطلق $|f(x)|$

س: جد قيمة التكامل $\int_0^2 |x-1|\,dx$

الدالة مستمرة في الفترة $[0,2]$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & x-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$$

* ① نجعل داخل المطلق = صفر ونجد قيمة x .

② نثبت الفترة على خط الاعداد

③ نلاحظ هل أن قيمة x تنتمي للفترة على خط الاعداد فأن كانت قيمة x تنتمي تدخل في الحل (اي تجزء الفترة)

$x - 1 = 0$ (داخل المطلق)

$x = 1 \in [0,2]$

خط الأعداد: 0 ، 1 ، 2 — أصغر $x<1$: $1-x$ ، أكبر $x>1$: $x-1$

$$\int_0^2 |x-1| = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$

$= \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0)\right] + \left[(2-2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$

$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 2 - 1 = 1$

س/ اثبت $\int_{-2}^{4} |3x-6|\,dx = 30$

الدالة مستمرة في الفترة $[-2,4]$

$$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6 & , 3x-6 \geq 0 \\ -(3x-6) & , 3x-6 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x-6 & , x \geq 2 \\ 6-3x & , x < 2 \end{cases}$$

$3x-6=0$ داخل المطلق

$3x=6 \Rightarrow x=2 \in [-2,4]$

$-2 \quad x<2 \text{ (اصغر)} \quad 2 \quad x>2 \text{ (اكبر)} \quad 4$: على $[-2,2]$ الدالة $6-3x$ ، وعلى $[2,4]$ الدالة $3x-6$

$$\int_{-2}^{4} |3x-6|\,dx = \int_{-2}^{2}(6-3x)\,dx + \int_{2}^{4}(3x-6)\,dx$$

$$= \left[6x - \frac{3x^2}{2}\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{3x^2}{2} - 6x\right]_{2}^{4}$$

$$= [(12-6)-(-12-6)] + [(24-24)-(6-12)]$$

$$= 6 + 18 + 6 = 30$$

س/ جد قيمة التكامل $\int_{-3}^{4} f(x)\,dx$ اذا كانت $f(x)=|x|$

الدالة مستمرة في الفترة $[-3,4]$

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

$x=0 \in [-3,4]$ داخل المطلق

$-3 \quad x<0 \text{ (اصغر)} \quad 0 \quad x>0 \text{ (اكبر)} \quad 4$: على $[-3,0]$ الدالة $-x$ ، وعلى $[0,4]$ الدالة x

$$\int_{-3}^{4} |x|\,dx = \int_{-3}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{4} x\,dx$$

$$= \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4}$$

$$= [(0)-(\tfrac{-9}{2})] + [(8)-(0)] = \frac{9}{2} + 8 = \frac{25}{2}$$

س/ جد قيمة التكامل $\int_{-1}^{1} |x+1|\,dx$

الدالة مستمرة في الفترة $[-1,1]$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & , x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & , x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & , x \geq -1 \\ -x-1 & , x < -1 \end{cases}$$

$x+1=0$

$x=-1 \in [-1,1]$

لا يجزء لانه واقع في طرف الفترة

$-1 \quad x>1 \quad 1$: على $[-1,1]$ الدالة $x+1$

$$\int_{-1}^{1} |x+1|\,dx = \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1}$$

$$= [(\tfrac{1}{2}+1)-(\tfrac{1}{2}-1)] = \tfrac{1}{2}+1-\tfrac{1}{2}+1 = 2$$

واجب
س/ اثبت أن $\int_{-2}^{3} |2x-2|\,dx = 13$

* اذا كانت الداله منفصلة ذات الجزئين

نقوم ببرهان على أن الداله مستمرة ضمن الفترة المعطاة .

① نعرف الداله وذلك بتعويض قيمة x في الداله التي تحتوي على مساواة .

② نقوم بأخذ (lim) من اليمين ومن اليسار فان كان مساوي فالغايه موجودة .

③ اذا كان $\lim = f(x)$ فالداله مستمرة ضمن الفترة المعطاة .

س/ اذا كانت $f(x)=\begin{cases} 3x^2 , & x \geq 0 \\ 2x , & x < 0 \end{cases}$ جد قيمة $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

نبرهن على أن الداله مستمرة على $[-1,3]$ عندما $x=0$ ← قيمة x هو العدد المشترك بين الفترة

① $f(x)=3x^2 \Rightarrow f(0)=3(0)^2=0$ معرفه

② $\lim_{x\to 0} 3x^2 = 3(0)^2 = 0 = L_1$

$\lim_{x\to 0} 2x = 2(0) = 0 = L_2$

$\Rightarrow L_1 = L_2$ الغايه موجودة

③ $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$ ∴ الداله مستمره ضمن الفترة $[-1,3]$

$0 \in [-1,3]$

(−1 ، $x<0$ أصغر ، 0 ، $x>0$ أكبر ، 3 ؛ $2x$ ، $3x^2$)

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 2x\,dx + \int_{0}^{3} 3x^2\,dx$$

$$= [x^2]_{-1}^{0} + [x^3]_{0}^{3} = [(0)-(1)] + [(27)-(0)] = -1+27 = 26$$

س/ اذا كانت $f(x)=\begin{cases} 2x , & x \geq 3 \\ 6 , & x < 3 \end{cases}$ جد قيمة $\int_{1}^{4} f(x)\,dx$

نبرهن على أن الداله مستمرة على $[1,4]$ عندما $x=3$

① $f(x)=2x \Rightarrow f(3)=2(3)=6$ معرفه

② $\lim_{x\to 3} 2x = 2(3) = 6 = L_1$

$\lim_{x\to 3} 6 = 6 = L_2$

$\Rightarrow L_1 = L_2$ الغايه موجودة

③ $f(3)=\lim_{x\to 3} f(x)$ ∴ الداله مستمرة ضمن الفترة $[1,4]$

$3 \in [1,4]$

(1 ، $x<3$ ، 3 ، $x>3$ ، 4 ؛ 6 داله ، $2x$)

$$\int_{1}^{4} f(x)\,dx = \int_{1}^{3} 6\,dx + \int_{3}^{4} 2x\,dx$$

$$= [6x]_{1}^{3} + [x^2]_{3}^{4} = [(18)-(6)] + [(16)-(9)] = 12+7 = 19$$

س/ اذا كانت $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & , x \geq 1 \\ 3 & , x < 1 \end{cases}$ جد قيمة $\int_0^5 f(x)\,dx$

نبرهن على أن الدالة مستمرة على $[0,5]$ عندما $x=1$

① $f(x)=2x+1 \Rightarrow f(1)=2(1)+1=3$ معرفة

② $\lim_{x\to 1} 2x+1 = 2(1)+1=3=L_1$
$\lim_{x\to 1} 3 = 3 = L_2$
$\Rightarrow L_1 = L_2$ الغاية موجودة

③ $f(1)=\lim_{x\to 1} F(x)$

∴ الدالة مستمرة ضمن الفترة $[0,5]$

$1 \in [0,5]$

0 ——— $x<1$ ——— 1 ——— $x>1$ ——— 5
(دالة 3) (2x+1)

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^1 3\,dx + \int_1^5 (2x+1)\,dx$$

$$= [3x]_0^1 + [x^2+x]_1^5$$

$$= [(3)-(0)] + [(25+5)-(1+1)] = 3+30-2 = 31$$

واجب
س/ اذا كانت $f(x)=\begin{cases} 3x^2+2 & , x \geq 2 \\ 4x+6 & , x < 2 \end{cases}$ جد قيمة $\int_1^4 f(x)\,dx$ ، $[72]=ج$

* خواص التكامل

① $\int_a^a f(x)\,dx = 0 \longrightarrow Ex \int_4^4 x^3\,dx = 0$

② $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ (a صغير، b كبير) , $Ex \int_3^1 6x^2\,dx = -\int_1^3 6x^2\,dx$

③ اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ وكانت $c \in (a,b)$ فان

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

a ——— c ——— b
تكامل الكل يساوي مجموع تكامل الاجزاء

س/ اذا كانت $\int_3^7 f(x)\,dx = 8$ ، $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ فاوجد $\int_1^7 f(x)\,dx$

Sol
$$\int_1^7 f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_3^7 f(x)\,dx$$

1 ——— 3 ——— 7
نرتب حدود التكامل جميعها تصاعدياً

$$= 5 + 8 = 13$$

س[12] 2016 اذا علمت أن $f(x)$ داله مستمرة على الفترة $[-2,6]$ فاذا كان $\int_{6}^{1} f(x)\,dx = -6$ وكان $\int_{-2}^{6}[f(x)+3]\,dx = 32$ فجد $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$



$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{6} f(x)\,dx$$

$$8 = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx + 6$$

$$\therefore \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = 8-6 = 2$$

① نجد $\int_{1}^{6}$

$$\int_{6}^{1} f(x)\,dx = -6 \Rightarrow -\int_{1}^{6} f(x)\,dx = -6$$

$$\therefore \int_{1}^{6} f(x)\,dx = 6$$

② نجد $\int_{-2}^{6}$

$$\int_{-2}^{6}[f(x)+3]\,dx = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + \int_{-2}^{6} 3\,dx = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + [3x]_{-2}^{6} = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + [(18)-(-6)] = 32$$

$$\int_{-2}^{6} f(x)\,dx + 24 = 32 \Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)\,dx = 32-24 \Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)\,dx = 8$$

واجب س[1] اذا كان $\int_{2}^{8} 3f = 15$ ، $\int_{6}^{2} 4f = 28$ جد $\int_{6}^{8} f$ $[12] = ج$.

س[2] اذا كانت $\int_{a}^{4} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = 2$ جد قيمة a $[a=0] = ج$.

س[3] اذا علمت ان $f(x)$ داله مستمرة على الفترة $[-3,5]$ فاذا كان $\int_{-3}^{5}[f(x)+4]\,dx = 72$ وكان $\int_{1}^{3} f(x)\,dx = -16$ جد قيمة التكامل $\int_{1}^{5} f(x)\,dx$ $[24] = ج$.

س/ اذا كان للمنحني $f(x)=(x-3)^3+1$ نقطة انقلاب (a,b) جد القيمة العددية للمقدار
$\int_0^b f'(x)\,dx-\int_0^a f''(x)\,dx$

نقوم بايجاد نقطة الانقلاب لانها تمثل حدود التكامل

$f(x)=(x-3)^3+1 \Rightarrow f'(x)=3(x-3)^2(1)$ (تابعه)

$f''(x)=6(x-3)^1 \;,\; f''(x)=0 \Rightarrow 6(x-3)=0\,]\div 6$

$x-3=0 \Rightarrow x=3$ مرشحه

$f''(x)=6(x-3)$: إشارة $- - -$ قبل 3 (تحدب) و $+ + +$ بعد 3 (تقعر)

$x=3$ انقلاب نقوم بتعويض قيمة x في الداله الاصليه لكي نجد نقطة الانقلاب

$f(3)=(3-3)^2+1=0+1=1 \;,\; (\overset{a}{3},\overset{b}{1})$ نقطة انقلاب

$$\therefore \int_0^b f'(x)\,dx-\int_0^a f''(x)\,dx=\int_0^1 3(x-3)^2\,dx-\int_0^3 6(x-3)\,dx$$

$$=3\int_0^1 (x-3)^2\,dx-\int_0^3 (6x-18)\,dx=\left[3\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^1-\left[\frac{6x^2}{2}-18x\right]_0^3$$

$$=\left[(x-3)^3\right]_0^1-\left[3x^2-18x\right]_0^3=\left[(1-3)^3-(0-3)^3\right]-\left[(27-54)-(0-0)\right]$$

$$=\left[(-8)-(-27)\right]-\left[27-54\right]=-8+27-27+54=46$$

س/ لتكن $f(x)=x^2+2x+k$ حيث $k\in R$ داله نهايتها الصغرى تساوي (-5) جد $\int_1^3 f(x)\,dx$

الداله التي نهايتها الصغرى $=-5$ هذا يعني اعطاء قيمة $y=-5$ لنقطة النهايه الصغرى $(x,-5)$ ولكي نجد قيمة x ← $f'(x)=0$

$f(x)=x^2+2x+k$

$f'(x)=2x+2 \;,\; f'(x)=0 \Rightarrow 2x+2=0\,]\div 2$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$ قيمة x الحرجه

$f'(x)=2x+2$: إشارة $- - - -$ قبل -1 و $+ + + +$ بعد -1 (صغرى)

$\therefore$ اصبحت نقطة النهايه الصغرى هي $(\overset{x}{-1},\overset{y}{-5})$ وهذه النقطة تحقق الداله

$\underbrace{f(x)}_{y}=x^2+2x+k \Rightarrow -5=(-1)^2+2(-1)+k \Rightarrow -5=1-2+k$

$-5=-1+k \Rightarrow -5+1=k \Rightarrow k=-4$

$$\int_1^3 (x^2+2x-4)^1\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+x^2-4x\right]_1^3$$

$$=\left[9+9-12\right]-\left[\frac{1}{3}+1-4\right]=\left[6\right]-\left[\frac{1}{3}-3\right]$$

$$=6-\frac{1}{3}+3=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

س/ اثبت أن $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 2$

$\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{-2}{3}}\,dx$ نحول الجذور الى دالة أسية Let $y = x^{\frac{1}{3}}-1$

$\bar{y} = \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}$

النقص هو العدد $\frac{1}{3}$

$= 3\int_1^8 (x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{-2}{3}}\,dx$

مشتقة تهمل

$= \left[3 \cdot \frac{2}{3}(x^{\frac{1}{3}}-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^8 = \left[2(\sqrt[3]{x}-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^8 = \left[2(2-1)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[2(1-1)^{\frac{3}{2}}\right]$

$= \left[2(1)^{\frac{3}{2}}\right] - [0] = 2$

واجب س/ اثبت أن $\int_1^{64} \frac{\sqrt[3]{9-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{45}{2}$

س2/ اذا كان $\int_1^h (2x-5)\,dx = 18$ جد قيمة h [$h=7$, $h=-2$ يهمل] ت2

س3/ اذا كان $\int_a^1 (2+\frac{1}{x^2})\,dx = 2$ جد قيمة a حيث $a>0$ [$a=\frac{1}{2}$, $a=-1$ يهمل] ت2

س4/ اذا كان (a,b) تمثل نقطة انقلاب للدالة $f(x)=x^3-3x^2-9x+14$ اوجد القيمة العددية للمقدار $\int_a^2 f'(x)\,dx + \int_2^b f''(x)\,dx$

س5/ اذا كانت (a,b) تمثل نقطة نهاية صغرى للدالة $f(x)=3x^2+cx+1$ فاذا علمت أن نقطة النهاية الصغرى $(1,2)$ جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f'(x)\,dx + \int_b^a f''(x)\,dx$

[1] ت2

«تكامل الدوال المثلثية»

* اشتقاق الدوال

$y = \sin\theta \longrightarrow \bar{y} = \cos\theta \cdot \bar{\theta}$

$y = \cos\theta \longrightarrow \bar{y} = -\sin\theta \cdot \bar{\theta}$

* اذا كانت $\cos$ ، $\sin$ داله أحاديه وكان أسسها واحد يكون التكامل مباشر

① $\int \sin\theta = \frac{-1}{\text{مشتقة الزاويه}} \cos\theta + C$

② $\int \cos\theta = \frac{1}{\text{مشتقة الزاويه}} \sin\theta + C$

* كل تكامل ناتجه يبدأ بحرف C نضع اشارة سالبه
* قاعدة المقلوبات .

س/ جد كلاً من التكاملات

① $\int \underset{\text{مقلوبات}}{\cos 3x}\, dx = \frac{1}{3}\sin 3x + c$

② $\int \underset{\text{مقلوبات}}{\sin(4x+5)}\, dx = \frac{-1}{4}\cos(4x+5) + c$

③ $\int (\underset{\text{مقلوبات}}{\cos 5x} + \underset{\text{جبري}}{x^2})\, dx = \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{x^3}{3} + c$

④ $\int 9\sin 3x\, dx = 9 \cdot \frac{-1}{3}\cos 3x + c = -3\cos 3x + c$

⑤ $\int x^2 \sin x^3\, dx = x^2 \cdot \frac{-1}{3x^2}\cos x^3 + c = \frac{-1}{3}\cos x^3 + c$

⑥ مهم $\int \frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx = \int 2x^{\frac{-2}{3}} \sin x^{\frac{1}{3}}$ تهيئة الداله للتكامل

$= 2x^{\frac{-2}{3}} \cdot \frac{-1}{\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}} \cos x^{\frac{1}{3}} + c = -6\cos\sqrt[3]{x} + c$

⑦ $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}\, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{-1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \cos\sqrt{x} + c = -2\cos\sqrt{x} + c$

* الداله الاسيه (داله مثلثيه ووجود مشتقتها جنبها)

$$\int \sin^n\theta \cos^1\theta \, d\theta = \frac{1}{\text{مشتقة الزاويه}} \cdot \frac{\sin^{n+1}\theta}{n+1}$$

$$\int \underbrace{\cos^n\theta}_{\text{دالة}} \, \underbrace{\sin^1\theta}_{\text{مشتقتها تهمل}} \, d\theta = \frac{-1}{\text{مشتقة الزاويه}} \cdot \frac{\cos^{n+1}\theta}{n+1}$$

اذا كان cos ، sin معاً وبنفس الزاويه بشرط على الاقل واحده منهما يكون أسها واحد يكون التكامل كما هو موضح ←

س/ جد كلاً من التكاملات

① $\int \sin^4 x \cos^1 x \, dx$ (مشتقه تهمل)

$= \frac{1}{(1)} \cdot \frac{\sin^5 x}{5} + C$

$= \frac{1}{5} \sin^5 x + C$

توضيح كيفية اجرى التكامل

$\int (\sin x)^4 \cos^1 x \, dx$ (يهمل) Let $y = \sin x$ (داخل القوس)

$= \frac{(\sin x)^5}{5} + C$

$\bar{y} = \cos x$ مشتقه داخل القوس تهمل بغض النظر عن الاشارة و مشتقة الزاويه راجع ص 14 خامساً

② $\int \cos^2 3x \sin^1 3x \, dx$ (يهمل)

$= \frac{-1}{3} \cdot \frac{\cos^3 3x}{3} + C = \frac{-1}{9} \cos^3 3x + C$

③ $\int \frac{\cos 2x}{\sin^6 2x} dx = \int \sin^{-6} 2x \cos^1 2x \, dx$ (مشتقه تهمل)

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^{-5} 2x}{-5} + C = \frac{-1}{10} \cdot \sin^{-5} 2x + C$

④ $\int (\sin x - \cos x)^7 \cdot (\cos x + \sin x) dx$ (مشتقه داخل قوس تهمل)

$= \frac{(\sin x - \cos x)^8}{8} + C$

⑤ $\int \sin^1 3x \cos^1 3x \, dx$ (يهمل)

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin^2 3x}{2} + C$

$= \frac{1}{6} \sin^2 3x + C$

طريقة أخرى للتكامل

$\int \cos^1 3x \sin^1 3x \, dx$ (يهمل)

$= \frac{-1}{3} \cdot \frac{\cos^2 3x}{2} + C$

$= \frac{-1}{6} \cos^2 3x + C$

⑥ $\int \csc^{2}x \cos x \, dx$

*عند وجود $\sec$ أو $\csc$ مع $\sin$ او $\cos$ نقوم بتحويل

$\sec = \frac{1}{\cos}$

$\csc = \frac{1}{\sin}$

$= \int \frac{1}{\sin^{2}x} \cos x \, dx$

$= \int \sin^{-2}x \cos^{1}x \, dx$ (تحمل)

$= \frac{1}{(1)} \cdot \frac{\sin^{-1}x}{-1} + C = \frac{-1}{\sin x} + C = -\csc x + C$

---

⑦ $\int \frac{\sin^{3}x}{\sec x} dx$

$= \int \frac{\sin^{3}x}{\frac{1}{\cos x}} dx = \int \sin^{3}x \cos^{1}x \, dx$ (تحمل) $= \frac{1}{(1)} \cdot \frac{\sin^{4}x}{4} + C = \frac{1}{4}\sin^{4}x + C$

---

⑧ $\int \sin 2x (\cos^{3}2x - 1) dx$

نقوم بتوزيع خارج القوس.

$= \int (\cos^{3}2x \sin^{1}2x - \sin^{1}2x) dx$

(يحمل) (مقلوبات)

$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{\cos^{4}2x}{4} - \frac{-1}{2} \cdot \cos 2x + C = \frac{-1}{8}\cos^{4}2x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$

---

*ملاحظة (مهم جداً): في حالة وجود دوال مثلثية مضروبة او مقسومة مع بعضها ولم تكن زواياها موحدة يجب توحيدها وذلك باستخدام قوانين نصف الزاوية

① $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$ (العدد 2 ثابت، نصف زاوية)

② $\cos 2\theta = \cos^{2}\theta - \sin^{2}\theta$

③ $\cos 2\theta = 2\cos^{2}\theta - 1$

④ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^{2}\theta$

⑨ $\int \sin 6x \cos^{2}3x \, dx$

(زوايا غير موحدة)

$= \int (2\sin 3x \cos^{1}3x) \cos^{2}3x \, dx$

(عند الضرب تجمع الاسس)

$= \int 2\cos^{3}3x \sin^{1}3x \, dx$ (يحمل)

$= 2 \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{\cos^{4}3x}{4} + C$ (with cancellation: $2 \to 1$, $4 \to 2$)

$= \frac{-1}{6}\cos^{4}3x + C$

⑩ $\int \sin 2x \sin x \, dx$

$= \int 2 \sin x \cos x \sin x \, dx$

$= \int 2 \sin^2 x \cos x = 2 \cdot \frac{1}{(1)} \frac{\sin^3 x}{3} + C = \frac{2}{3} \sin^3 x + C$

(تكامل)

نستخدم قانون نصف الزاوية للبسط ثم نقوم بتحليل البسط فرق بين مربعين .

⑪ $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$

$= \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx = \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{(\cos 2x - \sin 2x)} dx$

$= \int (\cos 2x + \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{-1}{2} \cos 2x + C$

(مثلثيات) (مثلثيات)

عام

⑫ $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) dx$

تحليل فرق بين مربعين — أحد قوانين نصف الزاوية $\cos 2x$ — قانون = 1

$= \int \cos 2x \, (1) \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$

(مثلثيات)

---

* مشتقة داخل الجذر غير متوفرة لذلك يجب تغيير شكل الدالة وذلك بجعل داخل الجذر مقدار ثلاثي لكي نجعله مربع كامل .

① نقوم بالتعويض عن $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$

② وبالتعويض عن $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

③ اعادة ترتيب

④ نطبق قاعدة المربع الكامل ($\sqrt{(ج)^2}$ = ± ج)

⑬ $\int \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx$

$= \int \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x} \, dx$

$= \int \sqrt{\cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x} \, dx$

$= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} \, dx$

$= \int \pm (\cos x - \sin x) dx = \pm(\sin x - (-\cos x)) + C = \pm(\sin x + \cos x) + C$

(مثلثيات) (مثلثيات)

واجب

س: جد التكاملات الآتية

① $\int \sin 4x \cdot \sin 2x \, dx$ $[\frac{1}{3} \sin^3 2x + c] =$ ج.

② $\int \cos 4x \cdot \cos 2x \, dx$ $[\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x + c] =$ ج.

③ $\int \cos 4x \sin 2x \, dx$ $[\frac{-1}{3} \cos^3 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + C] =$ ج.

④ $\int \sqrt{\sin 2x \sin x} \, dx$ $[\frac{-2\sqrt{2}}{3} \cos^{\frac{3}{2}} x + C] =$ ج.

⑤ $\int (\cos^4 3x - \sin^4 3x) dx$ $[\frac{1}{6} \sin 6x + C] =$ ج.

⑥ $\int \frac{\sin 4x}{\csc 8x} dx$ $[\frac{1}{6} \sin^3 4x + C] =$ ج.

* تكامل الدوال $\sin^n x$ ، $\cos^n x$ أحاديه ولها أس

اولاً اذا كان الاس (n) عدد زوجي

نقوم بتحويل $\sin^2$ ، $\cos^2$ بقوانين ضعف الزاوية

① $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

② $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$

ثابت ثابت الزاويه تضرب في العدد 2

س جد التكاملات الآتية

① $\int \sin^2 3x\,dx$ (ضعف زاوية) (الزاوية تضرب في 2)

$= \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 6x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{6}\sin 6x + c$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$

② $\int \cos^2 2x\,dx = \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x)dx$ (ضعف زاوية)

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + c$

③ $\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x)^2 dx$ (ضعف زاويه) (نفتح القوس مربع حدانية)

$= \int (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos^2 2x)dx$ (ضعف زاويه)

$= \int [\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x)]dx$ (نوزع خارج القوس)

$= \int (\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x)dx$ نجمع الحدود المتشابهه ثم نكامل

$= \int (\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x)dx$ (مقلوبات) (مقلوبات)

$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + c$

$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

④ $\int \cos^4 4x \, dx = \int (\cos^2 4x)^2 dx = \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 8x)^2 dx$

ضعف زاوية — نفتح القوس مربع حدانية

$= \int (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos^2 8x) dx$

ضعف زاوية

$= \int [\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 8x + \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 16x)] dx$

نوزع خارج القوس

$= \int (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 8x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 16x) dx$ نجمع الحدود المتشابهة

$= \int (\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 8x + \frac{1}{8}\cos 16x) dx$

مثلثات — مثلثات

$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\sin 8x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\sin 16x + c$

$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{128}\sin 16x + c$

---

⑤ $\int (1 + \cos 3x)^2 dx = \int (1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x) dx$

نفتح القوس مربع حدانية — ضعف زاوية

$= \int (1 + 2\cos 3x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 6x) dx$ نجمع الحدود المتشابهة

$= \int (\frac{3}{2} + 2\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 6x) dx$

مثلثات — مثلثات

$= \frac{3}{2}x + 2\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x + c$

$= \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$

كامله — سؤال شامل للملاحظات الثلاث

⑥ $\int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2) dx$

نفتح الاقواس بالتوزيع

$= \int (\cos^2 2x \sin 2x + 2\sin 2x - \cos^2 2x - 2) dx$

ملاحظة ثانية — ملاحظة اولى مثلثات — ضعف زاوية — جبري

$= \int [\cos^2 2x \sin 2x + 2\sin 2x - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x) - 2] dx$

$= \int (\cos^2 2x \sin 2x + 2\sin 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x - 2) dx$ نجمع الحدود المتشابهة

$= \int (\cos^2 2x \sin 2x + 2\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{5}{2}) dx$

$= \frac{-1}{2}\cdot\frac{\cos^3 2x}{3} + 2\frac{-1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x - \frac{5}{2}x + c$

$$\frac{-1}{6}\cos^3 2x - \cos 2x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{5}{2}x + c$$

ثانياً اذا كان n (الاس) عدد فردي الى ← $\sin^n x \,,\ \cos^n x$.

نقوم بتحويل الداله من فرديه الى داله زوجيه وداله فرديه اسسها واحد

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

ثم نقوم بتحويل الداله الزوجيه بالقوانين ←

① $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

② $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

س/ جد كلاً من التكاملات الآتيه

① $\int \sin^3 x \, dx$

$= \int \sin x \underbrace{\sin^2 x}_{\text{قانون}} dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx$ (نوزع خارج القوس)

$= \int (\sin x - \cos^2 x \underbrace{\sin x}_{\text{مشتقه تهمل}}) dx$

$= \frac{-1}{1}\cos x - \frac{-1}{1}\frac{\cos^3 x}{3} + c = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$

② $\int \cos^3 2x \, dx = \int \cos 2x \underbrace{\cos^2 2x}_{\text{قانون}} dx$

$= \int \cos 2x (1 - \sin^2 2x) dx$ (نوزع خارج القوس) $= \int (\cos 2x - \sin^2 2x \cos 2x) dx$

$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^3 2x}{3} + c = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x + c$

③ $\int \sin^5 3x \, dx = \int \sin 3x \sin^4 3x \, dx = \int \sin 3x (\sin^2 3x)^2 dx$

$= \int \sin 3x (1 - \cos^2 3x)^2 dx$ (نفتح القوس مربع حدانية) $= \int [\sin 3x (1 - 2\cos^2 3x + \cos^4 3x)] dx$ (نفتح القوس بالتوزيع)

$= \int (\sin 3x - 2\cos^2 3x \sin 3x + \cos^4 3x \sin 3x) dx$

$= \frac{-1}{3}\cos 3x - 2 \cdot \frac{-1}{3}\frac{\cos^3 3x}{3} + \frac{-1}{3}\frac{\cos^5 3x}{5} + c$

$= \frac{-1}{3}\cos 3x + \frac{2}{9}\cos^3 3x - \frac{1}{15}\cos^5 3x + c$

زورونا على مواقع التواصل الاجتماعي رحلة التفوق في السادس

④ $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\,dx = \int \frac{\cos x\cos^2 x}{1-\sin x}\,dx$

فرق بين مربعين

$= \int \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{1-\sin x}\,dx = \int \frac{\cos x(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}\,dx$

$= \int \cos x(1+\sin x)\,dx = \int (\cos x + \sin x\cos x)\,dx$

يعمل

$= \frac{1}{(1)}\sin x + \frac{1}{(1)}\frac{\sin^2 x}{2} + C = \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

س/ واجب جد كلاً من التكاملات

① $\int (\sin^2 2x - \cos^2 3x)\,dx$ $\left[\frac{-1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + C\right]$ = ج

② $\int (\sin^2 2x - \cos^2 2x)\,dx$ $\left[\frac{-1}{4}\sin 4x + C\right]$ = ج

③ $\int \sin x\cos 2x\,dx$ $\left[\frac{-2}{3}\cos^3 x + \cos x + C\right]$ = ج

④ $\int \cos x\cos 2x\,dx$ $\left[\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + C\right]$ = ج

⑤ $\int \cos^2 x\sin^3 x\,dx$ ← نقوم بتجزئة الدالة الفردية $\left[\frac{-1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C\right]$ = ج

⑥ $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$ $\left[\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C\right]$ = ج

⑦ $\int \sqrt[3]{(\sin x - \cos x)(1-\sin 2x)}\,dx$ $\left[-(\cos x + \sin x) + C\right]$ = ج

---

* مراجعة حول الاشتقاق

$y = \tan\theta \xrightarrow{\text{اشتقاق}} y' = \sec^2\theta\cdot\theta'$

$y = \cot\theta \longrightarrow y' = -\csc^2\theta\cdot\theta'$

$y = \sec\theta \longrightarrow y' = \sec\theta\cdot\tan\theta\cdot\theta'$

$y = \csc\theta \longrightarrow y' = -\csc\theta\cdot\cot\theta\cdot\theta'$

س/ جد كلاً من التكاملات

① $\int \sec^2 3x\,dx = \frac{1}{3}\tan 3x + C$

② $\int \csc^2 4x\,dx = \frac{-1}{4}\cot 4x + C$

الدوال التربيعية الاحادية الوحيدة التي يكون تكاملهم مباشر.

③ $\int \sec 2x\tan 2x\,dx = \frac{1}{2}\sec 2x + C$

④ $\int \csc 3x\cot 3x\,dx = \frac{-1}{3}\csc 3x + C$

اذا كانت الدوال مضروبة مع بعضها وكانت كل منها اسها واحد وبنفس الزاوية يكون التكامل مباشر

* ملاحظة / اذا كانت الدوال مضروبة او مقسومة مع بعضها وكان أسسها غير الواحد فأن احداهما تكون مشتقة لآخر فيكون التكامل بأن نهمل المشتقة ونضيف الى الاس واحد ونقسم على الاس الجديد

$$\int (\text{دالة مثلثية})^n (\text{مشتقة الدالة المثلثية بدون الاس}) dx = \frac{1}{\text{مشتقة الزاوية}} \cdot \frac{(\text{دالة مثلثية})^{n+1}}{n+1} + c$$

(مشتقة الدالة المثلثية بدون الاس: تهمل)

س/ جد كلاً من التكاملات

① $\int \tan^6 x \sec^2 x \, dx = \frac{1}{(1)} \frac{\tan^7 x}{7} + c$ (مشتقة تهمل)

② $\int \sec^5 2x \tan 2x \, dx$ نقوم بسحب $\sec 2x$ لكي تكون المشتقة موجودة

$= \int \sec^4 2x \underbrace{\sec 2x \tan 2x}_{\text{مشتقة تهمل}} dx = \frac{1}{2} \frac{\sec^5 2x}{5} + c = \frac{1}{10} \sec^5 2x + c$

③ (عامة) $\int \cot x \csc^3 x \, dx = \int \csc^3 x \cot x \, dx$ نفس الملاحظة اعلاه

$= \int \csc^2 x \underbrace{\csc x \cot x}_{\text{مشتقة تهمل}} dx = \frac{-1}{(1)} \cdot \frac{\csc^3 x}{3} + c = \frac{-1}{3} \csc^3 x + c$

④ $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \cdot \underbrace{\sec^2 x}_{\text{مشتقة تهمل}} dx = \frac{1}{(1)} \cdot \frac{\tan^2 x}{2} + c$

ممكن أن يحل السؤال بأكثر من طريقة حاول الحل.

$\sec = \frac{1}{\cos}$

$\csc = \frac{1}{\sin}$

* ملاحظة ! اذا كانت الداله $\cot^2\theta$, $\tan^2\theta$ نقوم بتحويل الداله بالقوانين ←

$$\left.\begin{aligned} \tan^2\theta &= \sec^2\theta - 1 \\ \cot^2\theta &= \csc^2\theta - 1 \end{aligned}\right\}$$

س/ جد كلاً من التكاملات

① $\int \tan^2 8x \, dx = \int (\sec^2 8x - 1) dx = \frac{1}{8} \tan 8x - x + c$ (جبري مباشر)

② $\int \cot^2 5x \, dx = \int (\csc^2 5x - 1) dx = \frac{-1}{5} \cot 5x - x + c$ (جبري مباشر)

③ $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^3 x}dx$ $\because \tan^2 x = \sec^2 x - 1$ $\therefore 1+\tan^2 x = \sec^2 x$

$= \int \tan^{-3}x \underbrace{\sec^2 x}_{\text{مشتقة تهمل}} dx = \frac{1}{(1)} \cdot \frac{\tan^{-2}x}{-2} + c$

م ④ $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}dx = \int \frac{(\cot 2x)^{\frac{1}{2}}}{\sin^2 2x}dx = \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sin^2 2x}dx$

$= \int (\cot 2x)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\csc^2 2x}_{\text{مشتقة تهمل}} dx = \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{3}(\cot 2x)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{-1}{3}(\cot 2x)^{\frac{3}{2}} + c$

س واجب

جد التكاملات الآتية

① $\int \frac{\sqrt{\tan 2x+1}}{\cos^2 2x}dx$ $[\frac{1}{3}(\tan 2x+1)^{\frac{3}{2}} + c] =$ ج

② $\int \frac{1}{\tan^5 x \cdot \sin^2 x}dx$ $[-\frac{1}{6}\cot^6 x + c] =$ ج

③ $\int \tan^4 2x \, dx$ $[\frac{1}{6}\tan^3 2x - \frac{1}{2}\tan 2x + x + c] =$ ج

④ $\int (\sec 2x + \tan 2x)^2 dx$

---

* **تكامل الدوال المثلثية المحددة**

ملاحظة: لايجاد قيم الزوايا للدوال « tan, cot, sec, csc »

نقوم بتحويل الدوال بدلالة sin أو cos ثم نجد قيم الزوايا من خلالها.

Ex ① $\csc 30 = \frac{1}{\sin 30} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ ② $\sec 30 = \frac{1}{\cos 30} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

س/ جد قيم كلاً من التكاملات

① $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx$ (مباشر)

$= [\frac{1}{(1)}\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$ $\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$

---

② $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec x \tan x)dx = [\frac{1}{(1)}\sec x]_0^{\frac{\pi}{3}}$ (مباشر)

$= \sec\frac{\pi}{3} - \sec 0 = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1$

③ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x\,dx = [-\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = [(-\cot\frac{\pi}{2})-(-\cot\frac{\pi}{4})]$

مباشر

$\cot\frac{\pi}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1}=0$

$= [(0)-(-1)] = 1$

مهم

④ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x\,dx$

دالة أسية — مشتقة داخل القوس (تمام)

$= [2(\sin x)^{\frac{1}{2}}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = [2\sqrt{\sin x}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = (2\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}) - (2\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}})$

$= (2\sqrt{1}) - (2\sqrt{\frac{1}{2}}) = (2) - (2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2-\sqrt{2}$

س/ جد قيمة $a \in R$ إذا علمت $\int_{1}^{a} (x+\frac{1}{2})\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$ مباشر

مهم وزاري

$[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x]_{1}^{a} = 2[\frac{1}{1}\tan x]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$[\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}] - [\frac{1}{2}+\frac{1}{2}] = 2[(\tan\frac{\pi}{4})-(\tan 0)]$

$(\frac{a^2+a}{2}) - (1) = 2(1-0) \Rightarrow \frac{a^2+a}{2} - 1 = 2$

$\frac{a^2+a}{2} = \frac{3}{1} \Rightarrow a^2+a=6 \Rightarrow a^2+a-6=0$ وسطين × طرفين

$(a+3)(a-2)=0$

- $a+3=0 \Rightarrow a=-3$
- $a-2=0 \Rightarrow a=2$

* النظرية الاساسية للتكامل – الدالة المقابلة

اذا كانت f داله مستمرة على الفترة [a,b] فانه يوجد دالة F مستمرة على الفترة [a,b] بحيث

$\forall (a,b) \longrightarrow \acute{F}(x) = f(x)$.

ويكون فيها

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

دالهصغير   دالهكبير

س/ اذا كانت f(x) داله مستمرة على الفترة [1,5] بحيث $F(x) = 3x^2$ داله مقابلة للداله f جد $\int_1^5 f(x)dx$.

بما أن الدالهمقابلة

$\therefore \int_1^5 f(x)\,dx = [F(x)]_1^5 = [3x^2]_1^5$

$= [3(5)^2 - 3(1)^2] = 75 - 3 = 72$

س/ اذا كانت f داله مستمرة على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ وأن الدالة المقابلة f هي $F(x) = \sin x$, $F:[0,\frac{\pi}{2}] \to R$ فأجد $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

بما أن الدالة مقابلة

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

س/ اثبت فيما اذا كانت $F(x) = x^3 + 2$, $F:[1,3] \longrightarrow R$ هي داله مقابله للداله $f(x) = 3x^2$. ثم جد $\int_1^3 f(x)dx$.

---

① الداله F مستمرة على الفترة [1,3] لانها كثيرة الحدود .
② الداله F قابلة للاشتقاق على الفترة (1,3) لانها كثيرة الحدود .
③

$F(x) = x^3 + 2$

$\acute{F}(x) = 3x^2 = f(x)$ موجودة

$\therefore$ الداله F هي داله مقابله للدالة f

$\int_1^3 f(x)\,dx = [F(x)]_1^3 = [x^3 + 2]_1^3$

$= [(27+2) - (1+2)] = 29 - 3 = 26$

س/ اثبت أن الدالة $F:[0,\frac{\pi}{6}] \longrightarrow R$ ، $F(x)=\sin x + x$

هي دالة مقابلة للدالة $f:[0,\frac{\pi}{6}] \longrightarrow R$ ، $f(x)=1+\cos x$

ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$.

① الدالة F مستمرة على الفترة $[0,\frac{\pi}{6}]$.

② الدالة F قابلة للاشتقاق على الفترة $(0,\frac{\pi}{6})$

③

$$F(x)=\sin x + x$$

$$\acute{F}(x)=\cos x\,(1)+1=f(x)$$ موجودة

∴ الدالة F هي دالة مقابلة للدالة f

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx=[F(x)]_0^{\frac{\pi}{6}}=[\sin x + x]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=[(\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})-(\sin 0+0)]$$

$$=[(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6})-(0+0)]=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{3+\pi}{6}$$

س/ اثبت أن الدالة $F:R \longrightarrow R$ ، $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

هي دالة مقابلة للدالة $f:R \longrightarrow R$ ، $f(x)=\cos 2x$

ثم احسب $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$

① الدالة F مستمرة على R

② الدالة F قابلة للاشتقاق على R

③

$$F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\acute{F}(x)=\frac{1}{2}\cos 2x\cdot(2)=\cos 2x=f(x)$$ موجودة

∴ الدالة F هي دالة مقابلة للدالة f .

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=[F(x)]_0^{\frac{\pi}{4}}=[\frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=[(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2})-(\frac{1}{2}\sin 0)]=[\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}(0)]=\frac{1}{2}$$

س/ واجب: اثبت أن $F(x)=2x^2-x$ ، $F:[-2,3]\longrightarrow R$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=4x-1$

ثم جد قيمة $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$

س/ اذا كانت $F(x)=\sin^2 2x$ ، $F:R\longrightarrow R$ اثبت أن F هي دالة مقابلة للدالة f حيث $f:R\longrightarrow R$ ، $f(x)=2\sin 4x$ ثم جد قيمة $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx$.

* اللوغارتم الطبيعي $Ln(u)$

اشتقاق داله لوغارتم

$$y = Ln(u) \Rightarrow \bar{y} = \frac{\bar{u}}{u} = \frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{الدالة نفسها}}$$

نجد $\bar{y}$ لكل من الدوال

① $y = Ln\,3x \longrightarrow \bar{y} = \frac{3}{3x} \longrightarrow \bar{y} = \frac{1}{x}$

② $y = Ln(2-\cos x) \longrightarrow \bar{y} = \frac{0-(-\sin x)}{2-\cos x} \longrightarrow \bar{y} = \frac{\sin x}{2-\cos x}$

③ $y = (\underbrace{Ln x}_{\text{تابعة}})^2 \longrightarrow \bar{y} = 2(Ln x)^1 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} Ln x$

④ $y = Ln\left(\frac{1}{x}\right)^3 \longrightarrow y = Ln\frac{1}{x^3} \longrightarrow y = Ln\,x^{-3}$

$\bar{y} = \frac{-3x^{-4}}{x^{-3}} \longrightarrow \bar{y} = -3x^{-1} = \frac{-3}{x}$

مهمة ⑤ $y = Ln(\tan^2 x) \longrightarrow \bar{y} = \frac{2(\tan x)\sec^2 x(1)}{(\tan x)^2} = \frac{2\sec^2 x}{\tan x}$

* عند وجود مطلق لدالة Ln يعتبر المطلق قوس عادي.

مهمة ⑥ $y = \underbrace{x^2}\cdot\underbrace{Ln|x|}$ مشتقة حاصل ضرب دالتين.

$\bar{y} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + Ln|x| \cdot 2x \longrightarrow \bar{y} = x + 2x\,Ln|x|$

* خواص داله اللوغارتم

① $Ln\,a + Ln\,b = Ln\,ab$

② $Ln\,a - Ln\,b = Ln\,a \cdot \frac{1}{b} = Ln\frac{a}{b}$

③ $n\,Ln\,a = Ln\,a^n$

④ $Ln\,1 = 0$ صفر

⑤ $Ln\,e = 1$

ملاحظة: لا يمكن استخدام خاصية الضرب والقسمة إلا إذا كان معامل Ln متوحد.

* تكامل الكسر اللوغاريتمي

يستخدم التكامل بواسطة Ln في الدوال الكسرية فقط

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$\int \frac{\overbrace{\text{مشتقة المقام (الدالة) كاملة}}^{\text{تهمل}}}{\text{دالة}} = \ln|\text{المقام}| + c$$

ملاحظة : عند وجود قوس مرفوع الى أس في البسط او في المقام لا يحل السؤال بطريقة Ln

---

جد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int \frac{\overset{\text{تهمل}}{4}}{(4x+9)^1} dx$

Let $u = 4x+9$

$\underset{\text{المقام}}{u'} = 4$

$= \ln|4x+9| + c$

اذا كانت مشتقة المقام موجوده في البسط فان التكامل يكون بأن نهمل البسط و يكون $\ln|\text{المقام}| + c$

واذا كان هناك نقص في مشتقة البسط و النقص بشرط ثابت نضعه للبسط (اي للمشتقة) ونضع مقلوبه خارج التكامل كما مر سابقاً.

---

② $\int \frac{x^2}{(x^3+5)^1} dx$

Let $u = x^3+5$

$u' = 3x^2$

النقص هو العدد 3

$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{(x^3+5)^1} dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+5| + c$

---

③ $\int_0^3 \frac{1}{(x+1)^1} dx = \Big[\ln|x+1|\Big]_0^3$

Let $u = x+1$

$u' = 1$

$= \ln|3+1| - \ln|0+1| = \ln|4| - \ln|1| = \ln 4 - 0 = \ln 2^2 = 2\ln 2$

---

④ $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx = \Big[\ln|x^2+9|\Big]_0^4$

Let $u = x^2+9$

$u' = 2x$

$= \ln|16+9| - \ln|0+9| = \ln|25| - \ln|9| = \ln 25 - \ln 9$

$= \ln 5^2 - \ln 3^2 = 2\ln 5 - 2\ln 3 = 2\ln\frac{5}{3}$

---

⑤ $\int \frac{\cos 3x}{1+\sin 3x} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3\cos 3x}{1+\sin 3x} dx$

Let $u = 1+\sin 3x$

$u' = \cos 3x \cdot 3$

النقص هو 3

$= \frac{1}{3}\ln|1+\sin 3x| + c$

⑥ $\int \frac{\sec x \tan x}{2+\sec x}\,dx = \ln|2+\sec x|$ Let $u = 2+\sec x$, $\bar{u} = \sec x \tan x\,(1)$

---

⑦ $\int \tan 5x\,dx$

* اذا كانت tan أو cot أحادية وكان أسها واحد نقوم بتحويلها بالقوانين $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, $\cot = \frac{\cos}{\sin}$ ثم نجري التكامل بطريقة Ln

$= \int \frac{\sin 5x}{\cos 5x}\,dx$

$= \frac{-1}{5}\int \frac{-5\sin 5x}{\cos 5x}\,dx = \frac{-1}{5}\ln|\cos 5x| + c$ Let $u = \cos 5x$, $\bar{u} = -\sin 5x\cdot(5)$ النقص هو (-5)

---

⑧ $\int \cot x\,dx$ Let $u = \sin x$, $\bar{u} = \cos x\,(1)$

$= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + c$

---

⑨ $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}\,dx = \Big[\ln|2+\tan x|\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$ Let $u = 2+\tan x$, $\bar{u} = \sec^2 x\,(1)$

$= \ln\left|2+\tan\frac{\pi}{4}\right| - \ln\left|2+\tan\frac{-\pi}{4}\right|$ $\tan\frac{\pi}{4} = 1$

$= \ln|2+1| - \ln\left|2-\tan\frac{\pi}{4}\right| = \ln|3| - \ln|1| = \ln 3 - 0 = \ln 3$

---

⑩ $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}\,dx = \Big[\ln|x^3+4x+1|\Big]_0^1$ Let $u = x^3+4x+1$, $\bar{u} = 3x^2+4$

$= \ln|1+4+1| - \ln|0+0+1| = \ln|6| - \ln|1| = \ln 6 - 0 = \ln 6$

---

⑪ عام $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int [\ln(x)]^1 \frac{1}{x}\,dx$ (دالة $[\ln(x)]$، مشتقتها $\frac{1}{x}$) Let $y = \ln(x)$, $\bar{y} = \frac{1}{x}$

$\frac{[\ln(x)]^2}{2} + c$

---

⑫ ع $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,dx$ Let $u = \ln(x)$, $\bar{u} = \frac{1}{x}$

نضع مقلوب x في البسط مشتقة المقام متوفرة في البسط

$= \ln|\ln(x)| + c$

(3) $\int \cot^3 5x\,dx = \int \cot 5x \cot^2 5x\,dx$

$= \int \cot 5x(\csc^2 5x - 1)\,dx$

$= \int (\cot 5x \cdot \csc^2 5x - \cot 5x)\,dx$

$= \int (\cot 5x \csc^2 5x)\,dx - \int \frac{\cos 5x}{\sin 5x}\,dx$ Let $u = \sin 5x$, $\bar{u} = \cos 5x \cdot 5$

$= \int (\cot 5x \csc^2 5x)\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{5\cos 5x}{\sin 5x}\,dx$ $\bar{u} = 5\cos 5x$

يهمل النقص هو 5

$= \frac{-1}{5} \cdot \frac{\cot^2 5x}{2} - \frac{1}{5} \ln|\sin 5x| + c$

$= \frac{-1}{10} \cot^2 5x - \frac{1}{5} \ln|\sin 5x| + c$

---

(13) ؟ $\int \frac{4-x}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{-(x-4)}{(x-1)^2}$

$= -\int \frac{(x-1)-3}{(x-1)^2}\,dx = -\int \left[\frac{(x-1)}{(x-1)^2} - \frac{3}{(x-1)^2}\right]dx$ نجزء البسط على المقام

$= -\int \left[\frac{1}{(x-1)} - 3(x-1)^{-2}\right]dx$ يوزع التكامل

$= \left[\ln|x-1| - 3\frac{(x-1)^{-1}}{-1}\right] + c = -\left[\ln|x-1| + \frac{3}{(x-1)}\right] + c$

س/ جد كلاً من التكاملات (واجب)

① $\int \frac{\sin 2x}{1-3\cos 2x}\,dx$ $\left[\frac{1}{6}\ln|1-3\cos 2x| + c\right] =$ ج

② $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx$ $[\ln|\cos x + \sin x| + c] =$ ج

③ $\int \frac{dx}{2x + x\ln x}$ $[\ln|2+\ln x| + c] =$ ج

④ $\int \frac{x+1}{x-1}\,dx = \int \frac{x+1-1+1}{x-1}\,dx = \int \frac{(x-1)+2}{x-1}\,dx = \int \left[\frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1}\right]dx$

اضافة وطرح واحد لكي يكون البسط مثل المقام

اكمل الحل .. ج = $[x + 2\ln|x-1| + c]$

⑤ $\int \frac{2-x}{(x-1)^2}\,dx$ $-\left[\ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + c\right] =$ ج

* اشتقاق الدالة الاسية e^{x}

$y = e^{u} \Rightarrow \acute{y} = e^{u} \cdot \acute{u}$

(مشتقة الاس) . (نفسها)

س جد $\acute{y}$ لكل من الدوال

① $y = e^{2x+1} \Rightarrow \acute{y} = e^{2x+1} \cdot 2 = 2 \cdot e^{2x+1}$

وجود Ln مع القيمة المطلقة يعتبر المطلق قوس عادي

عامة

② $y = e^{x^2} \ln|2x|$

$\acute{y} = e^{x^2} \cdot \frac{2}{2x} + \ln|2x| \cdot e^{x^2} \cdot 2x$

$\acute{y} = \frac{e^{x^2}}{x} + 2x\, e^{x^2} \ln|2x|$

③ $y = \sin 5x\, e^{3x} \Rightarrow \acute{y} = \sin 5x \cdot e^{3x} \cdot 3 + e^{3x} \cdot \cos 5x \cdot 5$

$\acute{y} = 3 \sin 5x \cdot e^{3x} + 5 e^{3x} \cos 5x$

④ $y = \cos(e^{\pi x}) \Rightarrow \acute{y} = -\sin(e^{\pi x}) \cdot e^{\pi x} \cdot \pi$

زاوية

$\acute{y} = -\pi e^{\pi x} \sin(e^{\pi x})$

عامة

⑤ $y = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$ مشتقة حاصل قسمة دالتين

$\acute{y} = \frac{(e^{x} - e^{-x}) \cdot (e^{x} - e^{-x}) - (e^{x} + e^{-x})(e^{x} + e^{-x})}{(e^{x} - e^{-x})^2}$

$\acute{y} = \frac{(e^{2x} - e^{0} - e^{0} + e^{-2x}) - (e^{2x} + e^{0} + e^{0} + e^{-2x})}{(e^{x} - e^{-x})^2}$

$\acute{y} = \frac{e^{2x} - 1 - 1 + e^{-2x} - e^{2x} - 1 - 1 - e^{-2x}}{(e^{x} - e^{-x})^2} = \frac{-4}{(e^{x} - e^{-x})^2}$

* ملاحظة

① $y = e^{x} \rightarrow \acute{y} = e^{x}$

② $y = e^{-x} \rightarrow \acute{y} = -e^{-x}$

③ $e^{x} \cdot e^{x} = e^{2x}$

عند الضرب بجمع الاسس

مبرهنة a عدد موجب ،

$y = a^{u} \Rightarrow \acute{y} = a^{u} \cdot du \cdot \ln(a)$

(نفسها) (مشتقة الاس) (Ln الاساس)

س جد $\acute{y}$ للدوال الآتية

① $y = 3^{2x+5} \Rightarrow \acute{y} = 3^{2x+5} \cdot (2) \cdot \ln(3)$

② $y = 5^{\sin x} \Rightarrow \acute{y} = 5^{\sin x} \cdot (\cos x) \cdot \ln(5)$

③ $y = 9^{\sqrt{x}} \Rightarrow \acute{y} = 9^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot \ln(9)$

* تكامل الدوال الاسية

$$\int e^{u}\cdot du = e^{u} + c$$

اذا كانت مشتقة الاس موجودة فيكون التكامل بأن تهمل المشتقة ونكتب الداله الاسيه فقط + c

واذا كان هناك نقص في مشتقة الاس ثابت نجمع الثابت للمشتقه ونجمع مقلوبه خارج التكامل كما مر سابقاً.

جد كلاً من التكاملات

① $\int e^{3x}\, 3dx = e^{3x} + c$ (مشتقة الاس تهمل)

Let $u = 3x$ الاس مشتقة موجودة
$u' = 3$

---

② $\int e^{x^4+3}\, x^3 dx = \frac{1}{4}\int e^{x^4+3}\, 4x^3 dx = \frac{1}{4} e^{x^4+3} + c$ (يهمل)

Let $u = x^4 + 3$
$u' = 4x^3$ النقص هو 4

---

③ $\int_0^1 (1+e^x)^2 \cdot e^x dx = \left[\frac{(1+e^x)^3}{3}\right]_0^1$ (داله اسية، مشتقة داخل القوس)

Let $y = 1 + e^x$
$y' = e^x\,(1)$

$= \left[\frac{(1+e^1)^3}{3}\right] - \left[\frac{(1+e^0)^3}{3}\right] = \left[\frac{(1+e)^3}{3}\right] - \left[\frac{(1+1)^3}{3}\right] = \left[\frac{(1+e)^3}{3} - \frac{8}{3}\right]$

---

④ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x\, dx$

Let $u = \cos x$
$u' = -\sin x$ النقص هو (1-)

$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\cdot(-1)\sin x\, dx = -\left[e^{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ (يهمل)

$= -\left[e^{\cos\frac{\pi}{2}} - e^{\cos 0}\right] = -\left[e^0 - e^1\right] = -(1-e)$

---

⑤ $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}\, 2dx$ (يهمل)

Let $u = 2x$
$u' = 2$ النقص هو 2

$= \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_{\ln 3}^{\ln 5} = \frac{1}{2}\left[e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[e^{\ln 5^2} - e^{\ln 3^2}\right] = \frac{1}{2}\left[5^2 - 3^2\right]$

$= \frac{1}{2}(25-9) = \frac{1}{2}(16) = 8$

* ملاحظة

$e^{\ln a} = a$

بشرط أن يكون معامل ln واحد

$n \ln a = \ln a^n$

⑥ $\int_0^{\ln 2} e^{-x} dx = -\int_0^{\ln 2} e^{-x} \underset{\text{يحمل}}{(-1)} dx$

Let $u = -x$

$u' = -1$ ، النقص هو (-1)

$= -[e^{-x}]_0^{\ln 2} = -[e^{-\ln 2} - e^{0}]$

$= -[e^{\ln 2^{-1}} - 1] = -[2^{-1} - 1] = -[\frac{1}{2} - 1] = -[-\frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$

---

⑦ $\int_1^2 x e^{-\ln x} dx = \int_1^2 x e^{\ln x^{-1}} dx$

$= \int_1^2 x \cdot x^{-1} dx = \int_1^2 x^0 dx$

عند الضرب نجمع الأسس

$= \int_1^2 1 dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$

طريقة أخرى للحل

$\int_1^2 x e^{-\ln x} dx = \int_1^2 \frac{x}{e^{\ln x}} dx$

$= \int_1^2 \frac{x}{x} dx = \int_1^2 1 dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$

---

⑧ $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = \int_1^4 e^{\sqrt{x}} \cdot \underset{\text{يحمل}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} dx$

Let $u = \sqrt{x}$

$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= [e^{\sqrt{x}}]_1^4 = e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}} = e^2 - e$

---

⑨ $\int \frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}} dx$

Let $u = \sqrt{2x+1}$

$u' = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$

$u' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$= \int e^{\sqrt{2x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$

$= e^{\sqrt{2x+1}} + C$

2014 د2

⑩ ع $\int \sqrt{e^{2x-4}}\, dx$ تحويل الداله الجذريه الى داله أسيه وذلك بقسمه $\frac{\text{الداخل}}{\text{الخارج}}$

$$= \int e^{\frac{2x-4}{2}}\, dx = \int e^{\frac{2x}{2} - \frac{4}{2}}\, dx$$

$$= \int e^{x-2}\, dx = e^{x-2} + C$$

Let $u = x-2$

$\bar{u} = 1$

---

⑪ عام $\int \sec^2 3x\, e^{\tan 3x}\, dx$

Let $u = \tan 3x$

$\bar{u} = \sec^2 3x \cdot 3$

النقص هو 3

$$= \frac{1}{3}\int 3\sec^2 3x\, e^{\tan 3x}\, dx$$

(تحت $3\sec^2 3x$: يحمل)

$$= \frac{1}{3} e^{\tan 3x} + C$$

---

⑫ ع $\int \frac{1}{e^{4x}}\, dx$

$$= \int e^{-4x}\, dx = \frac{-1}{4}\int e^{-4x}(-4)\, dx$$

(تحت (-4): يحمل)

$$= \frac{-1}{4} e^{-4x} + C$$

Let $u = -4x$

$\bar{u} = -4$ النقص هو (-4)

---

⑬ ع $\int \frac{1 + e^{2x}}{2x + e^{2x}}\, dx$

Let (المقام) $u = 2x + e^{2x}$

$\bar{u} = 2 + e^{2x} \cdot 2$

عامل مشترك

$\bar{u} = 2(1 + e^{2x})$

النقص هو 2

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2(1 + e^{2x})}{2x + e^{2x}}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left|2x + e^{2x}\right|$$

واجب

س: جد كلاً من التكاملات الآتية

① $\int_{\ln 2}^{\ln 5} e^{3x}\,dx$ ج. $[39]$

② $\int_{\ln 3}^{\ln 4} e^{-x}\,dx$ ج. $[\frac{1}{12}]$

③ $\int \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}\,dx$

④ $\int \sqrt{e^{6x-5}}\,dx$ ج. $[\frac{1}{3} e^{3x-\frac{5}{2}} + c]$

⑤ $\int \sin 2x\, e^{\cos^2 x}\,dx$ ج. $[-e^{\cos^2 x} + c]$

⑥ $\int \sqrt[3]{27e^{9x} + e^{12x}}\,dx$ ج. $[\frac{1}{4}(27 + e^{3x})^{\frac{4}{3}} + c]$

⑦ $\int \frac{e^{x}(3+e^{x})}{2e^{2x} + 6e^{x}}\,dx$ ج. $[\frac{1}{2}x + c]$

⑧ $\int (e^{4x} - e^{-4x})^2\,dx$ ج. $[\frac{1}{8} e^{8x} - 2x - \frac{1}{8} e^{-8x} + c]$

⑨ $\int \frac{1}{x \ln 3x^2}\,dx$ ج. $[2 \ln |\ln(3x^2)| + c]$

⑩ $\int e^{5x}\left(\frac{e^{2x}}{7} + \frac{2}{e^{3x}}\right)dx$ ج. $[\frac{1}{49} e^{7x} + e^{2x} + c]$

* إيجاد مساحة المنطقة المستوية

اولاً : مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني ومحور السينات

لتكن $y = f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ ولتكن A مساحة المنطقة التي يحدها منحني الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$

فلإيجاد هذه المساحة نقوم بما يلي .

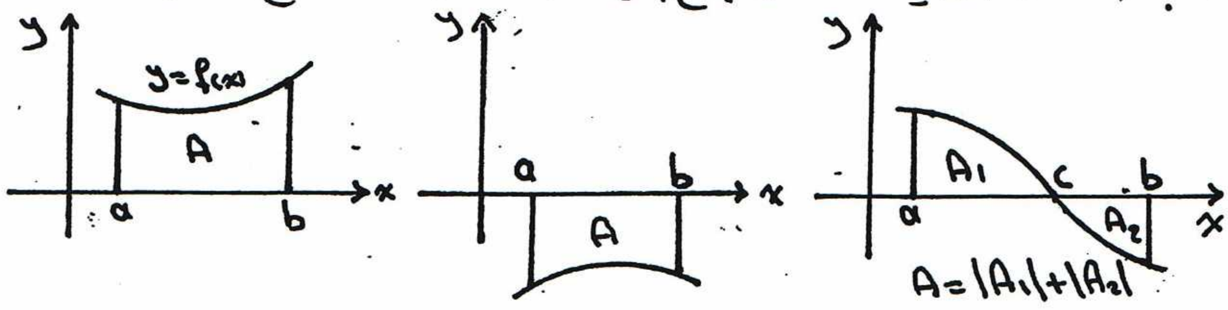
① نقوم بجعل الدالة مساوية للصفر ونجد قيم x (اي أن $y = 0$)

② بالاستعانة بخط الاعداد نثبت قيم الفترة على الخط ونلاحظ هل أن قيم x تنتمي للفترة أم لا فاذا كانت تنتمي للفترة اي تقع في داخل الفترة فهي تجزئ التكامل (المساحة) أما اذا كانت لا تنتمي للفترة او كانت تمثل احد طرفي الفترة فليس لها تأثير في الحل اي تهمل .

③ عند عدم أعطاء فترة في السؤال فأن قيم x الناتجة هي تمثل الفترات بعد ترتيبها على خط الاعداد تصاعدياً .

④ نجري عملية التكامل للدالة لكل فترة بشكل مستقل

⑤ نجد المساحة الكلية وذلك بجمع القيمة المطلقة لكل ناتج تكامل .



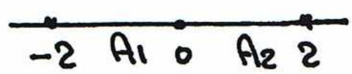
س/ جد مساحة المنطقة المحددة منحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 2]$

$y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0$

$x = 0 \in [-2, 2]$

$x = 2$ طرفية

$x = -2$ طرفية



$A_1 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} = [0 - 0] - [4 - 8] = 0 - [-4] = 4$

$A_2 = \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2} = [4 - 8] - [0 - 0] = [-4] - 0 = -4$

$\therefore A=|A_1|+|A_2| \Rightarrow A=|4|+|-4|=4+4=8$ وحدة مربعة

س/ جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x)=x^2-1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2,3]$

$y=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \; \begin{cases} x=1 \in [-2,3] \\ x=-1 \in [-2,3] \end{cases}$

$-2 \quad A_1 \quad -1 \quad A_2 \quad 1 \quad A_3 \quad 3$

$$A_1=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-2}^{-1}$$

$$=\left[\frac{-1}{3}+1\right]-\left[\frac{-8}{3}+2\right]=\frac{-1}{3}+1+\frac{8}{3}-2=\frac{7}{3}-1=\frac{4}{3}$$

$$A_2=\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left[\frac{1}{3}-1\right]-\left[\frac{-1}{3}+1\right]=\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}-1=\frac{2}{3}-2=\frac{-4}{3}$$

$$A_3=\int_{1}^{3}(x^2-1)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{1}^{3}$$

$$=\left[\frac{27}{3}-3\right]-\left[\frac{1}{3}-1\right]=9-3-\frac{1}{3}+1=7-\frac{1}{3}=\frac{20}{3}$$

$\therefore A=|A_1|+|A_2|+|A_3|=\left|\frac{4}{3}\right|+\left|\frac{4}{3}\right|+\left|\frac{20}{3}\right|=\frac{28}{3}$ وحدة مربعة

س/ جد المساحة المحددة بالدالة $f(x)=x^4-3x^2-4$ وعلى الفترة $[-2,3]$ ومحور السينات

$y=0 \Rightarrow x^4-3x^2-4=0 \Rightarrow (x^2-4)(x^2+1)=0$

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \notin R$ يهمل

$x^2-4=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0 \; \begin{cases} x=2 \in [-2,3] \\ x=-2 \end{cases}$ طرفية

$$A_1=\int_{-2}^{2}(x^4-3x^2-4)dx=\left[\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right]_{-2}^{2}$$

$-2 \quad A_1 \quad 2 \quad A_2 \quad 3$

$$=\left[\frac{32}{5}-8-8\right]-\left[\frac{-32}{5}+8+8\right]=\frac{32}{5}-16+\frac{32}{5}-16=\frac{64}{5}-32=\frac{96}{5}$$

$$A_2=\int_{2}^{3}(x^4-3x^2-4)dx=\left[\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right]_{2}^{3}$$

$$=\left[\frac{243}{5}-27-12\right]-\left[\frac{32}{5}-8-8\right]=\frac{243}{5}-39-\frac{32}{5}+16=\frac{211}{5}-23=\frac{96}{5}$$

$\therefore A=|A_1|+|A_2|=\left|\frac{-96}{5}\right|+\left|\frac{96}{5}\right|=\frac{192}{5}$ وحدة مربعة

س/ جد مساحة المنطقة التي يحددها مخطط الدالة $y=x^2$ ومحور السينات والمستقيمان $x=1 ,\ x=3$.

$y=0 \Rightarrow x^2=0 \xrightarrow{\text{بالجذر}} x=0 \notin [1,3]$

* المستقيمان $x=1 ,\ x=3$ هذا يعني الفترة $[1,3]$ (كبير / صغير)

العدد صفر خارج حدود التكامل لذلك يهمل

$1 \ [\ A \ ] \ 3$

$$A=\int_1^3 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3=\left[\frac{27}{3}\right]-\left[\frac{1}{3}\right]=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

$\therefore |A|=\left|\frac{26}{3}\right|=\frac{26}{3}$ وحدة مربعة

س/ جد المساحة المحددة بالمنحني $y=x^4-x$ ومحور السينات والمستقيمين $x=-1 ,\ x=1$

$y=0 \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0$ <
- $x=0 \in [-1,1]$
- $x^3=1 \xrightarrow{\text{بالجذر}} x=1$ طرفيه

$-1 \quad A_1 \quad 0 \quad A_2 \quad 1$

$$A_1=\int_{-1}^{0}(x^4-x)\,dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$$

$$=[0-0]-\left[\frac{-1}{5}-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{2+5}{10}=\frac{7}{10}$$

$$A_2=\int_{0}^{1}(x^4-x)\,dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$=\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right]-[0-0]=\frac{2-5}{10}=\frac{-3}{10}$$

$\therefore A=|A_1|+|A_2|=\left|\frac{7}{10}\right|+\left|\frac{-3}{10}\right|=\frac{7}{10}+\frac{3}{10}=\frac{10}{10}=1$ وحدة مربعة

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^3-3x^2+2x$ ومحور السينات .

$y=0 \Rightarrow x^3-3x^2+2x=0 \Rightarrow x(x^2-3x+2)=0$ (عامل مشترك)

$x(x-2)(x-1)=0$ (تجربة) <
- $x=0$
- $x=2$
- $x=1$

* اذا لم يعطي فترة في السؤال فان قيم x تمثل حدود التكامل بعد ترتيبها على خط الاعداد تصاعدياً

$0 \quad A_1 \quad 1 \quad A_2 \quad 2$

$$A_1=\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{1}{4}-1+1\right]-[0-0+0]=\frac{1}{4}$$

$$A_2=\int_1^2 (x^3-3x^2+2x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_1^2$$

$$=\left[\frac{16}{4}-8+4\right]-\left[\frac{1}{4}-1+1\right]=[4-8+4]-\left[\frac{1}{4}\right]=[0]-\left[\frac{1}{4}\right]=\frac{-1}{4}$$

$$\therefore A=|A_1|+|A_2|=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|\frac{-1}{4}\right|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$ وحدة مربعة

س/ جد المساحة المحددة بالدالة $f(x)=x^4-x^2$ ومحور السينات

$$y=0 \Rightarrow x^4-x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-1)=0 \Rightarrow x^2(x-1)(x+1)=0$$

- $x^2=0 \Rightarrow x=0$
- $x-1=0 \Rightarrow x=1$
- $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$-1 \quad A_1 \quad 0 \quad A_2 \quad 1$

$$A_1=\int_{-1}^0 (x^4-x^2)\,dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0$$

$$=[0-0]-\left[\frac{-1}{5}-\frac{-1}{3}\right]=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}=\frac{3-5}{15}=\frac{-2}{15}$$

$$A_2=\int_0^1 (x^4-x^2)\,dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right]-[0-0]=\frac{3-5}{15}=\frac{-2}{15}$$

$$\therefore A=|A_1|+|A_2|=\left|\frac{-2}{15}\right|+\left|\frac{-2}{15}\right|=\frac{2}{15}+\frac{2}{15}=\frac{4}{15}$$ وحدة مربعة

س/ جد المساحة المحددة بالدالة $y=x^3+4x^2+3x$ ومحور السينات

$$y=0 \Rightarrow x^3+4x^2+3x=0 \Rightarrow x(x^2+4x+3)=0 \Rightarrow x(x+3)(x+1)=0$$

- $x=0$
- $x=-3$
- $x=-1$

$-3 \quad A_1 \quad -1 \quad A_2 \quad 0$

$$A_1=\int_{-3}^{-1} (x^3+4x^2+3x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{-1}$$

$$=\left[\frac{1}{4}+\frac{-4}{3}+\frac{3}{2}\right]-\left[\frac{81}{4}+\frac{4(-27)}{3}+\frac{3(9)}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-\frac{81}{4}+36-\frac{27}{2}=\frac{-80}{4}+36-\frac{24}{2}-\frac{4}{3}$$

$$=-20+36-12-\frac{4}{3}=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

$$A_2=\int_{-1}^0 (x^3+4x^2+3x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^0$$

$$=[0+0+0]-\left[\frac{1}{4}+\frac{-4}{3}+\frac{3}{2}\right]=\frac{-1}{4}+\frac{4}{3}-\frac{3}{2}=\frac{-3+16-18}{12}=\frac{-5}{12}$$

$$\therefore A=|A_1|+|A_2|=\left|\frac{8}{3}\right|+\left|\frac{-5}{12}\right|=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{32+5}{12}=\frac{37}{12}$$ وحدة مربعة

* مساحة المنطقة المحددة بمنحنيين (دوال جبرية)

لتكن $f(x)$ ، $g(x)$ دالتين مستمرتين على الفترة $[a,b]$ فأن مساحة المنطقة A المحصورة بين المنحنيين نجدها كما يأتي.

① نجد نقاط تقاطع المنحنيين وذلك بجعل $f(x)=g(x)$ فتتكون معادلة نجد قيم x ونطبق نفس خطوات المساحة المحددة بمنحني الدالة ومحور السينات من ناحية تجزئة الفترة.

② الدالة المستخدمة في التكامل هي دالة الفرق بين الدالتين الاصليتين أي أن $\int [f(x)-g(x)]\,dx$

③ نجد المساحة الكلية بجمع القيم المطلقة لكل تكامل

س جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y=x^3$ والمستقيم $y=x$

نضع مساواة بين الدالتين ثم نجد قيم x

$x^3=x$

$x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)=0$

$x=0$ ، $x=1$ ، $x=-1$

لم يعطي فترة فأن قيم x هي حدود التكامل بعد ترتيبها تصاعدياً

$-1 \quad A_1 \quad 0 \quad A_2 \quad 1$

$A_1=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}$ (تكامل الفرق بين الدالتين)

$=[0-0]-\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right]=\frac{-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$A_2=\int_{0}^{1}(x^3-x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$

$=\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right]-[0-0]=\frac{-1}{4}$

$\therefore A=|A_1|+|A_2|=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ وحدة مربعة

س جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $y=\sqrt{x}$ والمستقيم $y=x$

عند وجود جذر في طرف نربع الطرفين اذا كان جذر تربيعي ثم نحل المعادلة

$x=\sqrt{x}$

$x^2=x \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0$ ، $x=0$ ، $x=1$

$0 \quad A \quad 1$

$A=\int_{0}^{1}(\sqrt{x}-x)\,dx=\int_{0}^{1}(x^{\frac{1}{2}}-x)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$ (تكامل الفرق للدالتين)

$=\left[\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\right]-[0-0]=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4-3}{6}=\frac{1}{6}$

$\therefore A=\left|\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}$ وحدة مربعة

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين $y=x^2 , y=x^4-12$

$x^4-12=x^2 \Rightarrow x^4-12-x^2=0 \Rightarrow x^4-x^2-12=0$

$(x^2-4)(x^2+3)=0$

$x^2+3=0 \Rightarrow x^2=-3 \notin R$ نهمل

$x^2-4=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0$ ، $x=2$ ، $x=-2$

$-2 \quad A \quad 2$

$A=\int_{-2}^{2}(x^4-12-x^2)dx$

$=\left[\frac{x^5}{5}-12x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=\left[\frac{32}{5}-24-\frac{8}{3}\right]-\left[\frac{-32}{5}+24-\frac{-8}{3}\right]$

$=\frac{32}{5}-24-\frac{8}{3}+\frac{32}{5}-24-\frac{8}{3}=\frac{64}{5}-\frac{16}{3}-48$

$=\frac{192-80-720}{15}=\frac{-608}{15}$, $\therefore A=\left|\frac{-608}{15}\right|=\frac{608}{15}$ وحدة مربعة

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين $y=\sqrt{x-1}$ ، $y=\frac{1}{2}x$ وعلى الفترة $[2,5]$

$\frac{1}{2}x=\sqrt{x-1}$ بتربيع الطرفين

$\frac{1}{4}x^2=x-1] \times 4 \Rightarrow x^2=4x-4 \Rightarrow x^2-4x+4=0$

$(x-2)(x-2)=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$ طرفيه

$2 \quad A \quad 5$

$A=\int_{2}^{5}\left(\frac{1}{2}x-\sqrt{x-1}\right)dx=\int_{2}^{5}\left[\frac{x}{2}-(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]dx$

$=\left[\frac{x^2}{4}-\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_{2}^{5}=\left[\frac{25}{4}-\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right]-\left[\frac{4}{4}-\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}\right]$

$=\left[\frac{25}{4}-\frac{2}{3}(2^2)^{\frac{3}{2}}\right]-\left[1-\frac{2}{3}\right]=\left[\frac{25}{4}-\frac{2}{3}(8)\right]-\left[\frac{1}{3}\right]$

$=\left[\frac{25}{4}-\frac{16}{3}\right]-\left[\frac{1}{3}\right]=\frac{25}{4}-\frac{16}{3}-\frac{1}{3}=\frac{25}{4}-\frac{17}{3}$

$=\frac{75-68}{12}=\frac{7}{12}$ $\quad \therefore A=\left|\frac{7}{12}\right|=\frac{7}{12}$ وحدة مربعة

س / ع جد المساحة المحددة بالدالتين $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$

نرفع الطرفين للعدد 6

$$\sqrt{x}=\sqrt[3]{x} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^6=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^6$$

$$x^3=x^2 \Rightarrow x^3-x^2=0 \Rightarrow x^2(x-1)=0$$

$x^2=0 \Rightarrow x=0$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

0 A_1 1

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})dx \Rightarrow \int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_0^1$$

اكمل الحل و اجب للطالب .ع = [$\frac{1}{12}$ وحدة مربعة]

* ايجاد المساحة لدالة مثلثية

اولاً مساحة المنطقة المحددة بين منحني الدالة المثلثية ومحور السينات

ملاحظات

① نفس خطوات الحل للمساحة المحددة بين دالة جبرية ومحور السينات

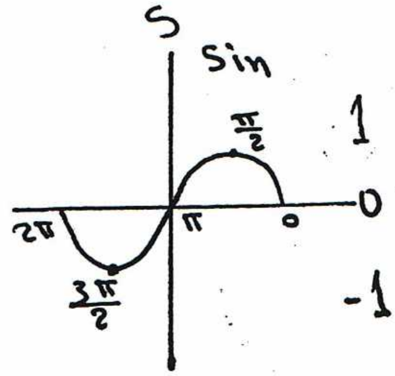
② في الدوال المثلثية يعطى فترة في السؤال

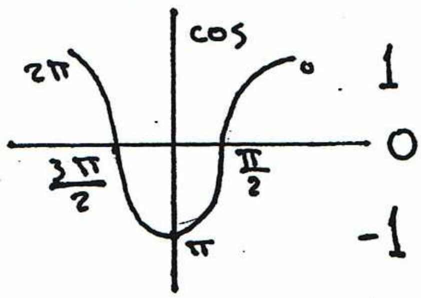
③
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$

④





$\sin 0=0$

$\sin\frac{\pi}{2}=1$

$\sin\pi=0$

$\sin\frac{3\pi}{2}=-1$

$\sin 2\pi=0$

$\cos 0=1$

$\cos\frac{\pi}{2}=0$

$\cos\pi=-1$

$\cos\frac{3\pi}{2}=0$

$\cos 2\pi=1$

س/ جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y=\sin x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[\frac{-\pi}{2},\pi]$

متى يكون sin مساوياً للصفر $y=0 \Rightarrow \sin x=0$

يكون sin مساوياً للصفر عندما تكون x تساوي $x=0,\pm\pi,\pm 2\pi$

$x=0,\ \underset{-180}{-\pi},\ \underset{180}{\pi},\ \underset{-360}{-2\pi},\ \underset{360}{2\pi}$

$\in \quad \notin \quad$ طرفية $\quad \notin \quad \notin$

$\underset{-90}{-\frac{\pi}{2}}$ — A_1 — 0 — A_2 — $\underset{180}{\pi}$

$$A_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin x\,dx=[-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=[-\cos 0]-[-\cos -\tfrac{\pi}{2}]$$

$$=[-1]-[-\cos\tfrac{\pi}{2}]=[-1]-[0]=-1$$

$$A_2=\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=[-\cos x]_{0}^{\pi}=[-\cos\pi]-[-\cos 0]$$

$$=[-(-1)]-[-1]=1+1=2 \quad \therefore A=|A_1|+|A_2|=|-1|+|2|=3$$ وحدة مربعة

س/ جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y=\cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi,\pi]$

متى يكون cos مساوياً للصفر $y=0 \Rightarrow \cos x=0$

يكون cos مساوياً للصفر عندما تكون x تساوي $x=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2}$

$x=\underset{-90}{-\frac{\pi}{2}},\ \underset{90}{\frac{\pi}{2}},\ \underset{-270}{-\frac{3\pi}{2}},\ \underset{270}{\frac{3\pi}{2}}$

$\in \quad \in \quad \notin \quad \notin$

$\underset{-180}{-\pi}$ — A_1 — $-\frac{\pi}{2}$ — A_2 — $\frac{\pi}{2}$ — A_3 — $\underset{180}{\pi}$

$$A_1=\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}=[\sin -\tfrac{\pi}{2}]-[\sin(-\pi)]$$

$$=[-\sin\tfrac{\pi}{2}]-[-\sin\pi]=[-1]-[0]=-1$$

$$A_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=[\sin\tfrac{\pi}{2}]-[\sin -\tfrac{\pi}{2}]$$

$$=[1]-[-\sin\tfrac{\pi}{2}]=[1]-[-1]=1+1=2$$

$$A_3=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx=[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=[\sin\pi]-[\sin\tfrac{\pi}{2}]=[0]-[1]=-1$$

$$\therefore A=|A_1|+|A_2|+|A_3|=|-1|+|2|+|-1|=4$$ وحدة مربعة

س/ جد المساحة المحددة بالدالة $y=\sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

$y=0 \Rightarrow \sin 3x=0$ متى يكون sin يساوي صفر

$3x = 0 , \pi , 2\pi$ يكون ذلك عندما

$x = 0 , \frac{\pi}{3} , \frac{2\pi}{3}$ (60, 120) بالقسمة على 3 طرفيه

$\frac{\pi}{3} \in$, $\frac{2\pi}{3} \notin$

* ملاحظة عندما تكون الفترة فيها قيم موجبة وصفر نأخذ قيم موجبة فقط للزوايا

$0 \quad A_1 \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2}$ (90)

$$A_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\,dx = \left[\frac{-1}{3}\cos 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left[\frac{-1}{3}\cos\pi\right]-\left[\frac{-1}{3}\cos 0\right]$$

$$=\left[\frac{-1}{3}(-1)\right]-\left[\frac{-1}{3}(1)\right]=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$A_2=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\,dx = \left[\frac{-1}{3}\cos 3x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{-1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}\right]-\left[\frac{-1}{3}\cos\pi\right]$$

$$=\left[\frac{-1}{3}(0)\right]-\left[\frac{-1}{3}(-1)\right]=0-\frac{1}{3}=\frac{-1}{3}$$

$\therefore A=|A_1|+|A_2|=\left|\frac{2}{3}\right|+\left|\frac{-1}{3}\right|=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$ وحدة مربعة

س/ جد المساحة المحددة بالمنحني $y=2\cos^2 x-1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

$y=0 \Rightarrow 2\cos^2 x-1=0 \Rightarrow \cos 2x=0$ قانون ضعف الزاوية

$2x = \frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}$ متى يكون cos مساوياً للصفر ← يكون ذلك في

$x = \frac{\pi}{4} , \frac{3\pi}{4}$ (45, 135) بالقسمة على 2

$\frac{\pi}{4} \in$, $\frac{3\pi}{4} \notin$

$0 \quad A_1 \quad \frac{\pi}{4} \quad A_2 \quad \frac{\pi}{2}$ (90)

$$A_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}\sin 0\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2}(1)\right]-\left[\frac{1}{2}(0)\right]=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

$$A_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{2}\sin\pi\right]-\left[\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2}(0)\right]-\left[\frac{1}{2}(1)\right]=0-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}$$

$\therefore A=|A_1|+|A_2|=\left|\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{-1}{2}\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ وحدة مربعة

س2 / جد المساحة المحددة بالمنحني $y=\sin 2x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$y=0 \Rightarrow \sin 2x=0 \Rightarrow 2x = 0 , \pm\pi , \pm 2\pi$ بالقسمة على 2

$\therefore x = 0 , \pm\frac{\pi}{2} , \pm\pi$

$x = 0 , -\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2} , -\pi , \pi$

$\in$ طرفية طرفية $\notin$ $\notin$

$-\frac{\pi}{2}$ — A_1 — 0 — A_2 — $\frac{\pi}{2}$

اكمل الحل واجب للطالب $\therefore$ [وحدة مربعة 2]

س2 / جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=2\cos x-\sin 2x$ ومحور السينات للفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

$y=0 \Rightarrow 2\cos x-\sin 2x=0$ قانون ضعف زاوية

$2\cos x-2\sin x\cos x=0]\div 2$

$\cos x-\sin x\cos x=0$

$\cos x(1-\sin x)=0$

$\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2} , \frac{3\pi}{2}$
طرفية $\notin$

$1-\sin x=0 \Rightarrow \sin x=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$
طرفية

0 — A — $\frac{\pi}{2}$

اكمل الحل واجب للطالب $\therefore$ = [وحدة مربعة 1]

س2 / جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y=\sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$y=0 \Rightarrow \sin 3x=0$

$3x = 0 , \pm\pi , \pm 2\pi$ بالقسمة على 3

$x = 0 , \pm\frac{\pi}{3} , \pm\frac{2\pi}{3}$

$x = 0 , -\frac{\pi}{3} , \frac{\pi}{3} , -\frac{2\pi}{3} , \frac{2\pi}{3}$

$\in$ $\in$ $\in$ $\notin$ $\notin$

$-\frac{\pi}{2}$ — A_1 — $-\frac{\pi}{3}$ — A_2 — 0 — A_3 — $\frac{\pi}{3}$ — A_4 — $\frac{\pi}{2}$

اكمل الحل واجب للطالب

$\therefore = [A=\left|\frac{1}{3}\right|+\left|\frac{-2}{3}\right|+\left|\frac{2}{3}\right|+\left|\frac{-1}{3}\right| = 2$ وحدة مربعة$]$

ثانياً: مساحة المنطقة المحددة بين منحني دالتين (دوال مثلثية)

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x)=2\sin x+1$, $g(x)=\sin x$, $[0,\frac{3\pi}{2}]$

خطوات الحل نفس الخطوات بإيجاد المساحة بين دالتين جبريتين راجع ص48

$$2\sin x+1=\sin x$$

$$2\sin x+1-\sin x=0$$

$$\sin x+1=0 \Rightarrow \sin x=-1$$

متى يكون sin مساوياً الى (-1) يكون ذلك في

$$x=\frac{3\pi}{2} \text{ طرفية}$$

$0 \quad A \quad \frac{3\pi}{2}$

$$A=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(\sin x+1)\,dx=\left[-\cos x+x\right]_0^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$=\left[-\cos\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\right]-\left[-\cos 0+0\right]=\left[0+\frac{3\pi}{2}\right]-\left[-1\right]=\frac{3\pi}{2}+1$$

$$\therefore A=\left|\frac{3\pi}{2}+1\right|=\frac{3\pi}{2}+1 \text{ وحدة مربعة}$$

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sin x\cos x$, $[0,2\pi]$

$$\sin x\cos x=\sin x \Rightarrow \sin x\cos x-\sin x=0$$

عامل مشترك

$$\sin x(\cos x-1)=0$$

$\sin x=0$

$x=0$ (طرفية) , π (180) $\in$, 2π (360) (طرفية)

$\cos x-1=0$

$\cos x=1 \Rightarrow x=0$ (طرفية) , 2π (360) (طرفية)

$0 \quad A_1 \quad \pi \,(180) \quad A_2 \quad 2\pi \,(360)$

$$A_1=\int_0^{\pi}(\sin x\cos x-\sin x)=\left[\frac{\sin^2 x}{2}+\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$=\left[\frac{\sin^2\pi}{2}+\cos\pi\right]-\left[\frac{\sin^2 0}{2}+\cos 0\right]=\left[\frac{(0)^2}{2}+(-1)\right]-\left[\frac{(0)^2}{2}+1\right]$$

$$=[0-1]-[0+1]=-1-1=-2$$

$$A_2=\int_{\pi}^{2\pi}(\sin x\cos x-\sin x)\,dx=\left[\frac{\sin^2 x}{2}+\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$=\left[\frac{\sin^2 2\pi}{2}+\cos 2\pi\right]-\left[\frac{\sin^2\pi}{2}+\cos\pi\right]=\left[\frac{(0)^2}{2}+1\right]-\left[\frac{(0)^2}{2}+(-1)\right]$$

$$=[0+1]-[0-1]=1+1=2$$

$$\therefore A=|A_1|+|A_2|=|-2|+|2|=4 \text{ وحدة مربعة}$$

س١ جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x)=\cos x$ ، $f(x)=\sin x$ وعلى الفترة $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

$\sin x = \cos x \,] \div \cos x$

$\tan x = 1$ متى يكون tan مساوياً للواحد

$x = \frac{\pi}{4}$ ← يكون ذلك في

متى يكون tan موجب يكون ذلك في الربع الاول والربع الثالث

في الربع الاول $x = \frac{\pi}{4} \in [\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ (45)

-90 ، 90 : $\frac{-\pi}{2}$ — A_1 — $\frac{\pi}{4}$ — A_2 — $\frac{\pi}{2}$

في الربع الثالث $x = \pi + x \Rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \notin [\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

نفسها θ | $\theta = \pi - j$

$\theta = 2\pi - j$ | $\theta = \pi + j$

$$A_1 = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\,dx = [\sin x + \cos x]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= [\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}] - [\sin\frac{-\pi}{2} + \cos\frac{-\pi}{2}] = [\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}] - [-\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}]$$

$$= [\frac{2}{\sqrt{2}}] - [-1+0] = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2}+1$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)\,dx = [\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= [\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}] - [\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}] = [1+0] - [\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}]$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$$

$\therefore A = |A_1| + |A_2| = |\sqrt{2}+1| + |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}+1-1+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ وحدة مربعة

عند رفع المطلق وكانت الحدود سالبة نقوم بقلب الاشارات واذا كانت موجبة لاتتغير

س٢ جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x)=\sin x$ ، $g(x)=\sin 2x$ وعلى الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

$\sin x = \sin 2x \Rightarrow \sin x - \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin x - 2\sin x\cos x = 0$

$\sin x(1 - 2\cos x) = 0$ اما $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$ (طرفية ، $\notin$ ، $\notin$)

او $1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ الاسناد

متى يكون cos موجب يكون ذلك في الربع الاول والرابع

في الربع الاول $x = \frac{\pi}{3} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (60)



في الربع الرابع $x = 2\pi -$ الاسناد $\Rightarrow x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$ (300)

اكمل الحل واجب للطالب ج = [$A_1 = \frac{-1}{4}$, $A_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ وحدة مربعة]

س/ جد المساحة المحددة بين الدالتين $y = \cos^2 x$ و $y = 1$ وعلى الفترة $[0, 2\pi]$

بالجذر $1 = \cos^2 x \Rightarrow 1 - \cos^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 0$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 , \pi , 2\pi$ (طرفية $\in$ طرفية)



*عند التكامل راجع ص 28 اكمل الحل جما واجب للطالب [$A_1 = \frac{\pi}{2}$, $A_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \pi$ وحدة مربعة]

س/ جد المساحة المحددة بين الدالتين $y = \cos x$, $y = 1 + 3\cos x$ وعلى الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

$1 + 3\cos x = \cos x \Rightarrow 1 + 3\cos x - \cos x = 0$

$1 + 2\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

متى يكون cos سالب يكون ذلك في الربع الثاني والثالث .

في الربع الثاني $x = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$ (120)

في الربع الثالث $x = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$ (240)

ممكن القول بما أن الفترة ليس فيها سالب ممكن أن يهمل هذا الجزء من الحل



اكمل الحل واجب للطالب. ج = [$A = \frac{\pi}{2} + 2$ وحدة مربعة]

س/ واجب جد المساحة المحددة بمنحني الدالة ومحور السينات .

① $f(x) = 4x^3 - 4x$, $x \in [-1, 2]$ ج = [11 وحدة مساحة]

② $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$ ج = [12 وحدة مساحة]

③ $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$, $x \in [-1, 1]$ ج = [$\frac{6}{7}$ وحدة مساحة]

④ $f(x) = 2\cos^2 x - 1$, $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ج = [2 وحدة مساحة]

⑤ $f(x) = 2\cos 2x - \sin 4x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ج = [1 وحدة مساحة]

⑥ $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ج = [1 وحدة مساحة]

⑦ $f(x) = \cos 3x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ج = [1 وحدة مساحة]

س/ واجب جد المساحة المحدودة بمنحني الدالتين

① $f(x)=x^3-x \ , \ g(x)=7x-3x^3$ [ج= 8 وحدة مساحة]

② $y=5x^4-15x^2 \ , \ y=20 \ , x\in[-3,3]$ [ج= 288 وحدة مساحة]

③ $f(x)=x^3-x \ , \ g(x)=3x$ [ج= 8 وحدة مساحة]

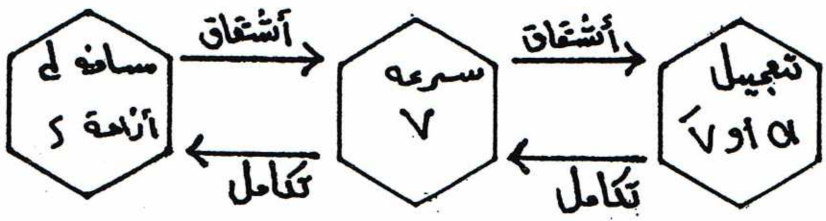
④ $y=x^3 \ , \ y=x \ , \ x=-1 \ , \ x=2$ [ج= $\frac{11}{4}$ وحدة مساحة]

⑤ $f(x)=\sin^2 x \ , \ g(x)=\cos^2 x \ , x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ [ج= 2 وحدة مساحة]

⑥ $f(x)=2\cos x \ , \ g(x)=\sin 2x \ , x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ [ج= 1 وحدة مساحة]

⑦ $f(x)=\cos^2 x \ , \ g(x)=\sin x\cos x \ , x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ [ج= 1 وحدة مساحة]

* المسافه والازاحه

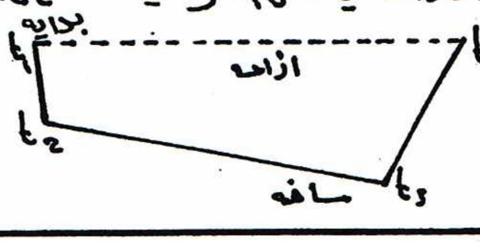


لتكن $V(t)$ سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وفي مستوٍ معين فأن المسافه المقطوعه في الفترة الزمنية $[t_1,t_2]$ هي

$$d_{\text{مسافه}}=\left|\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt\right|$$

أما الازاحه في نفس الفترة هي

$$s_{\text{ازاحة}}=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$



* ملاحظة

① $\int$ السرعه = الازاحه
وهو تكامل قد يكون محدد أو غير محدد فعند وجود فترة في السؤال فهو محدد وعند عدم وجود فترة في السؤال فهو غير محدد اي نضع الحرف c عند اجراء التكامل

② $\int$ السرعه = المسافه
وهو تكامل محدد دائماً أي لا نضع الحرف c عند اجراء التكامل

③ $\int$ التعجيل = السرعه
وهو تكامل غير محدد دائماً اي لا توجد فترة لذلك عند اجراء التكامل نضع الحرف c

* ملاحظة : الفرق بين المسافة والإزاحة

مسافة	إزاحة
① لكي نجد المسافة نكامل السرعة	① لكي نجد الإزاحة نكامل السرعة
② نضع مطلقاً عند إجراء التكامل لأن المسافة يجب أن تكون موجبة	② لا نضع مطلق عند إجراء التكامل لأن الإزاحة قد تكون موجبة أو سالبة أو صفر
③ يجب أن يكون التكامل محدد أي يجب إعطاء فترة في السؤال	③ قد يكون التكامل محدد أو غير محدد حسب منطوق السؤال .
④ عند إيجاد المسافة يجب أن نعرف هل الجسم غير مساره أو اتجاهه أم لا وذلك بأن نقوم بجعل السرعة مساوية بالعدد صفر ونجد قيم t ونلاحظ على خط الأعداد هل أن الفترة المعطاة في السؤال تتجزأ أم لا كما مر في موضوع إيجاد المساحات	④ التكامل يكون مباشر للسرعة .
⑤ تسمى المسافة فقط	⑤ تسمى الإزاحة ، بُعد الجسم ، موضع الجسم ، موقع الجسم ، أين يقف الجسم

* ملاحظة

① ماذا تعني المسافة المقطوعة في الثانية السابعة $[6,7]$

② ماذا تعني المسافة المقطوعة في الثانية الأولى $[0,1]$

③ ماذا تعني المسافة المقطوعة بعد 4 ثواني من بدء الحركة $[0,4]$

④ جسم يتحرك من السكون هذا يعني أن $t=0$ (الزمن) , $V=0$ (السرعة) , $d=0$ (المسافة)

⑤ جسم عاد إلى موضع انطلاقه هذا يعني أن الإزاحة = صفر

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)=2t-4\ m/s$ جد كلاً من

① المسافة المقطوعة في الفترة $[1,3]$

② الازاحة المقطوعة في الفترة $[1,3]$

③ المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة.

④ بُعده بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة.

---

* لإيجاد المسافة نقوم بجعل السرعة = صفر ونجد قيم t ونلاحظ هل أن قيم t تنتمي للفترة أم لا

① $v(t)=2t-4\ ,\ v(t)=0$

$2t-4=0]\div 2$

$t-2=0$

$t=2\in[1,3]$

1 — d_1 — 2 — d_2 — 3

$$d_1=\int_1^2(2t-4)dt=[t^2-4t]_1^2=[4-8]-[1-4]=[-4]-[-3]$$

$$=-4+3=-1$$

$$d_2=\int_2^3(2t-4)dt=[t^2-4t]_2^3=[9-12]-[4-8]=[-3]-[-4]$$

$$=-3+4=1$$

$$\therefore d_{\text{مسافة}}=|d_1|+|d_2|=|-1|+|1|=2\,m$$

② $$S_{\text{الازاحة}}=\int_1^3(2t-4)dt=[t^2-4t]_1^3=[9-12]-[1-4]=[-3]-[-3]$$

$$=-3+3=0$$

③ $$d_{\text{مسافة}}=\int_4^5(2t-4)dt=[t^2-4t]_4^5=[25-20]-[16-16]=5-0=5\,m$$

④ $$S_{\text{الازاحة}}=\int_0^4(2t-4)dt=[t^2-4t]_0^4=[16-16]-[0-0]=0-0=0$$

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)=(3t^2-6t+3)\ m/s$ إحسب

① المسافة المقطوعة في الفترة $[2,4]$

② الازاحة في الفترة $[0,5]$

---

① $v(t)=3t^2-6t+3\ ,\ v(t)=0$ نقوم بجعل السرعة = صفر

$3t^2-6t+3=0]\div 3$

$t^2-2t+1=0$

$(t-1)(t-1)=0\Rightarrow(t-1)^2=0\Rightarrow t-1=0\Rightarrow t=1\notin[2,4]$

2 — d — 4

$$d=\int_2^4(3t^2-6t+3)dt=[t^3-3t^2+3t]_2^4$$

$[64-48+12]-[8-12+6]=[28]-[2]=26 \therefore d=|26|=26m$

② $S_{\text{الازاحة}}=\int_0^5 (3t^2-6t+3)dt=[t^3-3t^2+3t]_0^5$

$=[125-75+15]-[0-0+0]=[65]-[0]=65m$

واجب

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)=4t-12$ جد

① المسافة المقطوعة في الفترة [1,5] $[d=16m]=2.$

② الازاحة التي قطعها الجسم في الفترة [1,5] $[S=0]=2$

③ المسافة التي قطعها الجسم خلال الثانية الرابعة $[d=2m]=2.$

④ بعده بعد مضي (10) ثواني من بدء الحركة $[S=80m]=2.$

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره (18) m/s^2 فاذا كانت سرعته قد اصبحت (82) m/s بعد مرور (4) ثواني من بدء الحركة جد

① المسافة خلال الثانية الثالثة.

② بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور (3) ثواني.

---

* عند اجراء التكامل للتعجيل سوف نكتب ثابت التكامل C ولكي نجد قيمة C يجب اعطاء زمن (t) وسرعة (v)

سرعة = ∫ تعجيل

$v(t)=\int 18dt$ $v=82$, $t=4$

$\underset{\text{سرعة}}{v(t)}=18t+C$ وبتعويض عن $v=82$, $t=4$

$82=18(4)+C \Rightarrow 82=72+C \Rightarrow C=82-72 \Rightarrow C=10$

$\therefore v(t)=18t+10$ سرعة

① $v(t)=0 \Rightarrow 18t+10=0$

$t=\frac{-10}{18}=\frac{-5}{9}$ يهمل ⟵ ملاحظة اذا كانت حدود السرعة جميعها موجبة او سالبة تكامل مباشر لان الزمن سوف يكون بالسالب يهمل

$d=\int_2^3 (18t+10)dt=[9t^2+10t]_2^3=[81+30]-[36+20]=111-56=55$

$\therefore d=|55|=55m$

② $S=\int_0^3 (18t+10)dt=[9t^2+10t]_0^3=[81+30]-[0+0]=111m$

س: جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)\ m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $90\ m/s$ احسب
① السرعة عندما $t=2$
② المسافة خلال الفترة $[1,2]$
③ الازاحة بعد (10) ثواني من بدء الحركة

السرعة = $\int$ تعجيل

$$v(t)=\int(4t+12)dt$$

نعوض $t=4$ ، $v(t)=90$ لكي نجد c

$$v(t)=2t^2+12t+c$$

$$90=2(4)^2+12(4)+c$$

$$90=32+48+c \Rightarrow 90=80+c \Rightarrow 90-80=c$$

$$\therefore c=10$$

$$\therefore v(t)=2t^2+12t+10 \quad \text{سرعة}$$

① السرعة عند $t=2$ تكون

$$v(2)=2(2)^2+12(2)+10=8+24+10=42\ m/s$$

② $$d=\int_1^2(2t^2+12t+10)dt=\left[\frac{2t^3}{3}+6t^2+10t\right]_1^2$$

*ملاحظة اذا كانت حدود السرعة جميعها موجبة او جميعها سالبة نكامل مباشر.

$$=\left[\frac{2(8)}{3}+6(4)+10(2)\right]-\left[\frac{2}{3}+6(1)+10(1)\right]$$

$$=\left[\frac{16}{3}+24+20-\frac{2}{3}-6-10\right]=\frac{14}{3}+28=\frac{14+84}{3}=\frac{98}{3}\ m$$

③ $$s=\int_0^{10}(2t^2+12t+10)dt=\left[\frac{2t^3}{3}+6t^2+10t\right]_0^{10}$$

$$=\left[\frac{2000}{3}+600+100\right]-[0+0+0]=\left[\frac{2000}{3}+700\right]=\frac{2000+2100}{3}$$

$$=\frac{4100}{3} \qquad \therefore d=\left|\frac{4100}{3}\right|=\frac{4100}{3}\ m$$

س: واجب جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $6t-18\ m/s^2$ وكانت سرعته $9\ m/s$ بعد مضي 5 ثواني أوجد
① الازاحة المقطوعة في الفترة $[1,3]$ — $[s=2m]=$ج
② بعد الجسم بعد مضي 3 ثواني من بدء الحركة — $[s=18m]=$ج
③ المسافة المقطوعة في الفترة $[1,3]$ — $[d=6m]=$ج
④ المسافة المقطوعة خلال الثانية الثالثة — $[d=2m]=$ج

واجب

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل $12t - 12\ m/s^2$ وكانت سرعته $72\ m/s$ بعد مضي 5 ثواني من بدأ الحركة اوجد:

① المسافة المقطوعة بعد مضي 4 ثواني من بدأ الحركة. $[d = 68\ m]$ ج/

② بعد الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدأ الحركة. $[S = -40\ m]$ ج/

③ المسافة المقطوعة خلال الثانية الرابعة $[d = 14\ m]$ ج/

س/ تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)\ m/s$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه، ثم احسب التعجيل عندها.

ملاحظ بما أن الجسم يعود الى الموضع الاصلي فأن الازاحة تساوي صفر

لذلك نجد الازاحة و نجعلها تساوي صفر لكي نجد الزمن

$$S_{\text{ازاحة}} = \int (100t - 6t^2)\,dt =$$

$$S = 50t^2 - 2t^3 + C$$

نجد قيمة C بما أن حركة الجسم من السكون

$$\therefore t = 0,\ S = 0$$

$$0 = 0 - 0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\therefore S_{\text{ازاحة}} = 50t^2 - 2t^3$$

$\because$ الجسم عاد الى موضعه

$\therefore S_{\text{ازاحة}} = 0$

$$50t^2 - 2t^3 = 0\ ] \div 2$$

$$25t^2 - t^3 = 0 \Rightarrow t^2(25 - t) = 0$$

$t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ بدء الحركة

$25 - t = 0 \Rightarrow t = 25$ الزمن اللازم لعودة النقطة

لايجاد التعجيل نشتق السرعة

$$V_{\text{سرعة}}(t) = 100t - 6t^2$$

$$V'(t) = 100 - 12t$$

$$V'(25) = 100 - 12(25)$$

$$= 100 - 300 = -200\ m/s^2$$

واجب

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل $(24t - 24)\ m/s^2$ اوجد الزمن اللازم لعودة الجسم الى نقطة بدأ الحركة وبأي سرعة؟ $[t = 3$ ثواني $,\ V(t) = 36\ m/s]$ ج/

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت $6\ m/s^2$ وبعد مضي 5 ثواني كان بعده $(100\ m)$ وبسرعة $(36\ m/s)$ اوجد بعد الجسم بعد مضي 10 ثواني. [535 m] ج/

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل $12t - 24\ m/s^2$ وبعد مضي 2 ثانية كان بعده $60\ m$ وبسرعة $16\ m/s$ أوجد الازاحة المقطوعة بعد مضي 3 ثواني من بدء الحركة $[S = 78\ m]$ ج/

* الحجوم الدورانية VOLUMES of Revolution

اولاً لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y=f(x)$ المستمرة من $x=a$ الى $x=b$ حول محور السينات نطبق العلاقة التالية

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

ثانياً لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $x=f(y)$ المستمرة من $y=a$ الى $y=b$ حول محور الصادات نطبق العلاقة التالية

$$V=\pi\int_a^b x^2\,dy$$

س المنطقة المحددة بين المنحني $y=\sqrt{x}$, $0\leq x\leq 4$ ومحور السينات ادارت حول محور السينات، جد حجمها.

$y=\sqrt{x}$ ، $[0,4]$ فترة

$y^2=x$

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx$$

$$V=\pi\int_0^4 x\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\pi[(8)-(0)]=8\pi$$ وحدة مكعبة

س اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2=8x$ والمستقيمين $x=0$ ، $x=2$ حول المحور السيني.

$[0,2]$ كبير صغير

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_0^2 8x\,dx$$

$$=\pi\left[4x^2\right]_0^2=\pi[(16)-(0)]=16\pi$$ وحدة مكعبة

س اوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y=x^2$ والمستقيمين $x=2$ ، $x=1$ حول المحور السيني.

$y=x^2$ ، $[1,2]$ فترة

$y^2=x^4$

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_1^2 x^4\,dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2$$

$$=\pi\left[\left(\frac{32}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}\right)\right]=\pi\left[\frac{32-1}{5}\right]=\frac{31}{5}\pi$$ وحدة مكعبة

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y=2x^2$ والمستقيم $x=5$ و $x=0$ حول المحور السيني.

$[0,5]$ فترة

$y=2x^2$

$y^2=4x^4$

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_0^5 4x^4\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{4x^5}{5}\right]_0^5=\pi\left[\left(\frac{4(5)^5}{5}\right)-(0)\right]$$

$$=\pi[4(5)^4]=\pi[4(625)]=2500\pi$$ وحدة مكعبة

س/ احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2=x^3$ والمستقيمين $x=2$ ، $x=0$ حول المحور السيني.

$[0,2]$

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_0^2 x^3\,dx=\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=\pi[(4)-(0)]=4\pi$$ وحدة مكعبة

س/ احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع الزائد $x^2-y^2=3$ حيث $1\leq x\leq 4$ حول المحور السيني.

$[1,4]$

$x^2-y^2=3$

$x^2-3=y^2$

$$V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_1^4 (x^2-3)\,dx=\pi\left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_1^4$$

$$=\pi\left[\left(\frac{64}{3}-12\right)-\left(\frac{1}{3}-3\right)\right]$$

$$=\pi\left[\frac{64}{3}-12-\frac{1}{3}+3\right]=\pi\left[\frac{63}{3}-9\right]=\pi\left[\frac{63-27}{3}\right]=\pi\left[\frac{36}{3}\right]=12\pi$$ وحدة مكعبة

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y=4x^2$ والمستقيمين $y=16$ ، $y=0$ حول المحور الصادي.

$[0,16]$

$y=4x^2$

$x^2=\frac{y}{4}$

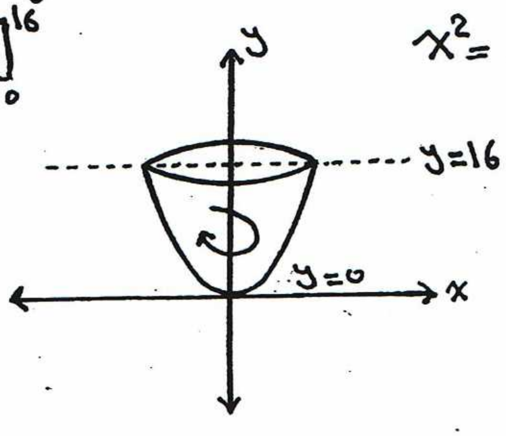
$$V=\pi\int_a^b x^2\,dy=\pi\int_0^{16}\frac{y}{4}\,dy=\pi\int_0^{16}\frac{1}{4}y\,dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{y^2}{2}\right]_0^{16}=\pi\left[\frac{y^2}{8}\right]_0^{16}$$

$$=\pi\left[\left(\frac{(16)^2}{8}\right)-(0)\right]$$

$$=\pi\left[\frac{16\times 16}{8}\right]$$

$$=\pi[16\times 2]=32\pi$$ وحدة مكعبة



س/ المنطقة المحددة بين المنحني $x=\frac{1}{\sqrt{y}}$ ، $1\leq y\leq 4$ دارت حول محور الصادات. جد حجمها.

$[1,4]$

$x=\frac{1}{\sqrt{y}}$

$x^2=\frac{1}{y}$

$$V=\pi\int_a^b x^2\,dy=\pi\int_1^4 \frac{1}{y}\,dy$$

$$V=\pi\Big[\ln|y|\Big]_1^4=\pi\big[\ln|4|-\ln|1|\big]=\pi\big[\ln 4-0\big]$$

$$=\pi\big[\ln 2^2\big]=\pi\big[2\ln 2\big]=2\pi\ln 2$$ وحدة مكعبة

س/ اوجد الحجم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y=\frac{1}{x}$ والمستقيمين $x=\frac{1}{2}$ ، $x=1$ دورة كاملة حول المحور الصادي.

* ملاحظة
بما أن الدورة حول المحور الصادي يجب أن تكون حدود الفترة هي قيم y لذلك نقوم بتعويض قيم x بالدالة لكي نجد قيم y

عندما $x=1 \leftarrow y=\frac{1}{x}$

$y=\frac{1}{1}$

$y=1$

عندما $x=\frac{1}{2} \leftarrow y=\frac{1}{\frac{1}{2}}$

$y=2$

$\therefore$ الفترة $[1,2]$

$y=\frac{1}{x}$

$yx=1$

$x=\frac{1}{y}$

$x^2=\frac{1}{y^2}$

$$V=\pi\int_a^b x^2\,dy=\pi\int_1^2 \frac{1}{y^2}\,dy$$

$$V=\pi\int_1^2 y^{-2}\,dy$$

$$V=\pi\Big[\frac{y^{-1}}{-1}\Big]_1^2=\pi\Big[\frac{-1}{y}\Big]_1^2$$

$$V=\pi\Big[\Big(\frac{-1}{2}\Big)-\Big(\frac{-1}{1}\Big)\Big]=\pi\Big[\frac{-1}{2}+1\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\pi$$ وحدة مكعبة

س/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2+x=1$ والمستقيم $x=0$ حول المحور الصادي.

حسب الملاحظ اعلاه

عندما $x=0 \leftarrow y^2+x=1$

$y^2+0=1$

$y^2=1 \rightarrow y=\pm1$ ، $[-1,1]$ فترة

$y^2+x=1$

$x=1-y^2$ بتربيع الطرفين

$x^2=(1-y^2)^2$

$x^2=1-2y^2+y^4$

$$V=\pi\int_a^b x^2\,dy=\pi\int_{-1}^{1}(1-2y^2+y^4)\,dy$$

$$=\pi\Big[y-\frac{2y^3}{3}+\frac{y^5}{5}\Big]_{-1}^{1}$$

$$=\pi\Big[1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\Big]-\Big[-1+\frac{-2}{3}+\frac{-1}{5}\Big]$$

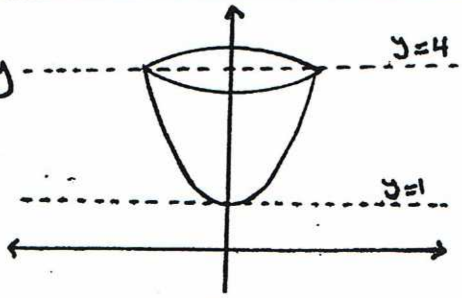
$$=\pi\Big[1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\Big]$$

$$=\pi\Big[2-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\Big]=\pi\Big[\frac{30-20+6}{15}\Big]$$

$$=\pi\Big[\frac{16}{15}\Big]=\frac{16}{15}\pi$$ وحدة مكعبة

س: اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي.

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy$$



* الدوران حول المحور الصادي ← $x = 0$
الدوران حول المحور السيني ← $y = 0$

$y = x^2 + 1$
∵ الدوران حول المحور الصادي
∴ $x = 0$
$y = 0 + 1 \rightarrow y = 1$
∴ الفترة $[1, 4]$

$$y = x^2 + 1$$
$$y - 1 = x^2$$

$$V = \pi \int_1^4 (y-1) \, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y \right]_1^4$$

$$= \pi \left[\left(\frac{16}{2} - 4 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] = \pi \left[(4) + \frac{1}{2} \right] = \frac{9}{2}\pi$$ وحدة مكعبة

س: اوجد الحجم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y = \frac{3}{x}$ ، $1 \le y \le 3$ دورة كاملة حول المحور الصادي.

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy$$

$y = \frac{3}{x}$
$yx = 3$
$x = \frac{3}{y}$
$x^2 = \frac{9}{y^2}$

$$V = \pi \int_1^3 \frac{9}{y^2} \, dy \Rightarrow V = \pi \int_1^3 9y^{-2} \, dy$$

$$V = \pi \left[\frac{9y^{-1}}{-1} \right]_1^3 = \pi \left[\frac{-9}{y} \right]_1^3$$

$$V = \pi \left[\frac{-9}{3} - \frac{-9}{1} \right] = \pi [-3 + 9] = 6 \text{ unit}^3.$$

تمرين: اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالمنحنيات التالية حول المحور الصادي

① $y = \frac{1-2x}{x}$	والمستقيم $y = 2$	$\left[\frac{1}{4}\pi \text{ unit}^3 \right]$ = ج.
② $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$1 \le y \le 2$	$\left[\frac{7}{24}\pi \text{ unit}^3 \right]$ = ج.
③ $5x + xy = 1$	$1 \le y \le 4$	$\left[\frac{1}{18}\pi \text{ unit}^3 \right]$ = ج.

تمرين واجب: اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالمنحنيات التالية حول المحور السيني.

① $y = \frac{1}{x+3}$	$1 \le x \le 3$	$\left[\frac{1}{12}\pi \text{ unit}^3 \right]$ = ج.
② $y = \sqrt[3]{3x-1}$	$0 \le x \le 3$	$\left[\frac{33}{5}\pi \text{ unit}^3 \right]$ = ج
③ $y = 6x + 1$	$1 \le x \le 5$	$\left[76\pi \text{ unit}^3 \right]$ = ج.

* اختبار الفصل الرابع

الاختبار الاول:

س1/ اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_0^3 (3x^2 - 2x)\, dx$ وذلك باستخدام التجزئة $\sigma = (0, 2, 3)$

س2/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل $(4t + 12)\ m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور (4) ثواني تساوي $90\ m/s$ جد ① المسافة خلال $[1, 2]$ ② الازاحة بعد (3) ثواني من بدء الحركة.

س3/ اذا كانت $f(x)$ مستمرة على الفترة $[-2, 6]$ فاذا كان $\int_1^6 f(x)\, dx = 6$ وكان $\int_{-2}^6 [f(x)+3]\, dx = 32$ فجد $\int_{-2}^1 f(x)\, dx$

س4/ جد التكاملات الآتية

① $\int \sin 6x \cos 3x\, dx$ ② $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}\, dx$

الاختبار الثاني:

س1/ احسب الحجم المتولد من دوران المنطقة بين محور السينات ومنحني $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $x = \frac{1}{2}$ ، $x = 1$ دورة كاملة حول المحور السيني.

س2/ جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان $\int_1^a (x + \frac{1}{2})\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$

س3/ اذا كانت $f : [2, 5] \longrightarrow R$ حيث $f(x) = 2x - 3$ اوجد $\int_2^5 f(x)\, dx$ ثم تحقق هندسياً بحساب مساحة المنطقة تحت منحني f

س4/ جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x) = \sin x$ ، $g(x) = \sin x \cos x$ حيث $x \in [0, 2\pi]$

الاختبار الثالث

س1/ لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in R$ دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) جد $\int_1^3 f(x)\, dx$

س2/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4\ m/s$ فجد ① المسافة المقطوعة في $[1, 3]$ ② الازاحة المقطوعة في الفترة $[1, 3]$ ③ المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة ④ بعده بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة

س3/ اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 1$ حول المحور السيني

س4/ اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \forall x \geq 0 \\ 2x, & \forall x < 0 \end{cases}$ جد $\int_{-1}^3 f(x)\, dx$

الاختبار الرابع

س1/ اثبت أن $\int_{-2}^4 |3x - 6|\, dx = 30$

س2/ جد المساحة المحددة بين الدالتين $y = x^4 - 12$ ، $y = x^2$

س3/ جد التكاملات

① $\int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2)\, dx$ ، ② $\int \sqrt{e^{2x-4}}\, dx$

س4/ اوجد كلاً من $L(\sigma, f)$ ، $U(\sigma, f)$ للدالة الآتية

اذا كان $\sigma = (0, 1, 2, 3, 4)$ ، $f(x) = 4x - x^2$ ، $f : [0, 4] \longrightarrow R$

الاختبار الخامس

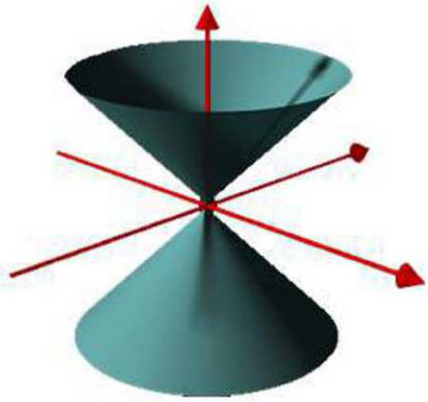
س/ جد كلا من التكاملات الآتية

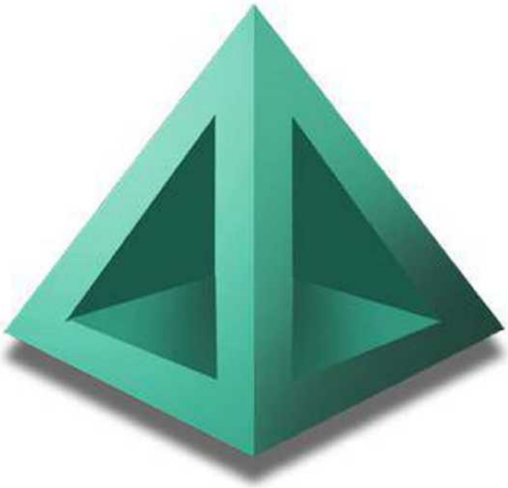
1. $\int_{-1}^{1} |x-1|\, dx$
2. $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\, dx$
3. $\int \sin^4 x\, dx$
4. $\int_{1}^{2} x\, e^{-\ln x}\, dx$
5. $\int \cot x \csc^3 x\, dx$
6. $\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\, dx$
7. $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)\, dx$
8. $\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$
9. $\int (\cos 2x \sin x)\, dx$
10. $\int \sin 2x \cos^2 x\, dx$
11. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x\, dx$
12. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x}\, dx$
13. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx$

استاذ عبد الكريم جبر ٠٧٨٠٣٠٠٢١٤٠

2017

رحلة التفوق في السادس
عطاءٌ بلا حدود





إعداد الأستاذ: عبدالكريم جبر

مساعد الطالب في
الرياضيات
للصف السادس العلمي

الفصل الخامس
المعادلات التفاضلية

@رحلة التفوق في السادس

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون﴾

انطلاقا من قول المصطفى (ص): ((زكاة العلم نشرهُ وتعليمهُ))

تضع شبكة مواقع رحلة التفوق في السادس التعليمية التربوية الخيرية بيـن ايديكم احدى اعمالها من ملازم مرحلة السـادس الأعدادي هذه المرحلة الهامة والمصيرية في حياة اعزائنا الطلبة وخاصة المتعففين منهم ولمن يتعذر عليه اقتناء هذه المساعدات المدرسية في محافظاتنا العراقية العزيزة بهدف النهوض وتطوير الواقع التعليمي ولو بالجزء اليسير.

إذ أن شبكتنا لاتقتصر عاى نشر الملازم المدرسية فقط أنما تقوم بنشـر الدروس المرئية المجانية لنكفأ التدريسيين بالأضافة الـى مجموعة قنواتنا التـدريسية وكذلك الأرشادات والنصـائح وطـرق الدراسـة الصحيحة هذا من جهة. أما من جهة أخرى فهو كـسر لشـوكة بعض المحسـوبين علـى الكـادر التدريسي ممن يرفضـون نشـر ملازمهم والتعـاون مع ابنائهم الطلبة ليأخذوا من المال هدفا أهم ويتناسوا مصلحة الطالب والواقع التعليمي المتدني.

علماً ان كـادر الشـبكة والقائمين عليها هم مجموعة من الشـبـاب العراقي الواعي المثقف بالأضافة الى تعـاون بعض المدرسين الكرام كما واننـا غير تابعين لأي جهة كانت رسمية او غير رسـمية انـما سر تجمعنا وعملنا هو خيري بحت آملين من الله عز وجل ان يوفقنا لتقديم كل ما هو صالح لشعبنا و وطننا الحبيب.

كادر شبكة رحلة التفوق في السادس

٢٠١٥/٨/٢١



الفصل الخامس
المعادلات التفاضلية

٠٧٨٠٣٠٠٢١٤٠
استاذ عبد الكريم جبر

المعادلة التفاضلية: هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة أو أكثر لدالة معينة او علاقة .

ملاحظة

① رتبة المعادلة : هي رتبة اعلى مشتقة .

② درجة المعادلة : هي اعلى أس لأعلى مشتقة .

س/ بين رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية الآتية .

المعادلة التفاضلية	الدرجة	الرتبة
① $(y''')^2 + (y')^5 + y^8 = 0$	الثانية	الثالثة
② $(y'')^4 = 1 + (y')^2$	الرابعة	الثانية
③ $(y'')^3 + (y'')^4 + 5(y')^5 = 3x$	الرابعة	الثانية
④ $(y^{(4)})^3 + (y^{(3)})^4 + (y^{(2)})^5 = \cos y$	الثالثة	الرابعة
⑤ $\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + \frac{d^3y}{dx^3} + 2yx = 4$	الاولى	الثالثة

المعادلة التفاضلية الاعتيادية

س/ بين أن العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$

* نقوم بأخذ الاشتقاق للدالة الحالية من المشتقة في السؤال لأعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية.

$y = x^2 + 3x$

$y' = 2x + 3$

$LHS = xy'$ ← نعوض قيمة y'

$= x(2x+3)$

$= 2x^2 + 3x$

$RHS = x^2 + y$ ← نعوض قيمة y

$= x^2 + x^2 + 3x$

$= 2x^2 + 3x$

⟹ $LHS = RHS$ (طرف أيسر = طرف أيمن)

$\therefore y = x^2 + 3x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية

2014

س/ هل $y = x^3 + x - 2$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} - 6x = 0$

$y = x^3 + x - 2$

$y' = 3x^2 + 1$

$y'' = 6x$

$LHS = \frac{d^2y}{dx^2} - 6x$

$= 6x - 6x$

$= 0$

$RHS = 0 \Longrightarrow LHS = RHS$

$\therefore$ $y = x^3 + x - 2$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية

س/ هل أن $y = x + 2$ حلاً للمعادلة $y'' + 3y' + y = x$

$y = x + 2$

$y' = 1$

$y'' = 0$

$LHS = y'' + 3y' + y$

$= 0 + 3(1) + x + 2$

$= x + 5$

$RHS = x \Longrightarrow LHS \neq RHS$

$\therefore$ $y = x + 2$ ليس حلاً للمعادلة

س/ واجب: هل أن $y = 2x^2 - 3x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $2xy' - x^2y'' = 2y$
[ج. العلاقة حل للمعادلة]

س/ برهن أن $y = \sin x$ هو حل للمعادلة $y'' + y = 0$

$y = \sin x$

$y' = \cos x \cdot (1)$

$y'' = -\sin x \cdot (1)$

$LHS = y'' + y$

$= -\sin x + \sin x$

$= 0$

$RHS = 0 \Longrightarrow LHS = RHS$

$\therefore$ $y = \sin x$ هو حلاً للمعادلة.

س/ هل $y = \tan x$ حلاً للمعادلة $y'' = 2y(1 + y^2)$

عند اشتقاق داله دائريه مرفوعة الى أس نقوم برفع الاس فوق قوس ثم نشتق بالسابعه

$y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x \cdot (1)$

$y' = (\sec x)^2$

$y'' = 2(\sec x)^1 \cdot \sec x \tan x \cdot (1) \Rightarrow y'' = 2\tan x \sec^2 x$

تابعه — مشتقة داخل قوس

تابع

$LHS = y''$

$= 2\tan x \sec^2 x$

$RHS = 2y(1+y^2)$

$= 2\tan x(1+\tan^2 x)$

$2\tan x \sec^2 x$

$\Longrightarrow LHS = RHS$

ملاحظ $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\therefore$ $y = \tan x$ حلاً للمعادلة التفاضلية

س/ برهن أن $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$

$y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$

$y' = 3[-\sin 2x \cdot (2)] + 2\cos 2x \cdot (2)$

$y' = -6\sin 2x + 4\cos 2x$

$y'' = -6\cos 2x \cdot (2) + 4[-\sin 2x \cdot (2)]$

$y'' = -12\cos 2x - 8\sin 2x$

عند وجود إشارة سالبة في الاشتقاق نضع قوس.

$LHS = y'' + 4y$

$= -12\cos 2x - 8\sin 2x + 4(3\cos 2x + 2\sin 2x)$

$= -12\cos 2x - 8\sin 2x + 12\cos 2x + 8\sin 2x$

$= 0$

$RHS = 0$

$\Longrightarrow LHS = RHS$

$\therefore$ $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ حلاً للمعادلة.

س/ برهن أن العلاقة $S = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ هي حل للمعادلة $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$

$S = 8\cos 3t + 6\sin 3t$

$\frac{ds}{dt} = 8[-\sin 3t \cdot (3)] + 6\cos 3t \cdot 3$

$= -24\sin 3t + 18\cos 3t$

$\frac{d^2s}{dt^2} = -24\cos 3t \cdot (3) + 18[-\sin 3t \cdot (3)]$

$= -72\cos 3t - 54\sin 3t$

$LHS = \frac{d^2s}{dt^2} + 9s$

$= -72\cos 3t - 54\sin 3t + 9(8\cos 3t + 6\sin 3t)$

$= -72\cos 3t - 54\sin 3t + 72\cos 3t + 54\sin 3t = 0$

$RHS = 0$

$\therefore$ $S = 8\cos 3t + 6\sin 3t$ حلاً للمعادلة

واجب
س1 اثبت أن $y = \sin 3x$ هي حل للمعادلة $\frac{d^4y}{dx^4} - 81y = 0$

س2 اثبت أن $y = x\sin x$ حل للمعادلة التفاضلية $x^2 y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$

س3 اثبت أن $y = x\ln|x| - x$ أحد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y \;,\; x > 0$

* ملاحظة $|\;|$ ln يعتبر مغلق قوس عادي عند الاشتقاق

$y = \ln u$

$y' = \frac{\text{مشتقتها}}{u \text{ الدالة}}$

$y = x\ln|x| - x$

$y' = x \cdot \frac{1}{x} + \ln|x| \cdot (1) - 1$

$y' = 1 + \ln|x| - 1 \Rightarrow y' = \ln|x|$

$LHS = x\frac{dy}{dx}$

$= x \cdot \ln|x|$

$RHS = x + y$

$= x + x\ln|x| - x$

$= x \cdot \ln|x|$

$\Rightarrow LHS = RHS$

$\therefore y = x\ln|x| - x$ هو حلاً للمعادلة.

س4 اثبت أن $y = 2e^x$ حلاً للمعادلة $y''(1-x) + y'x - y = 0$

$y = e^u$

$y' = e^u \cdot u'$ مشتقة لاس نفسها

$y = 2e^x \Rightarrow y' = 2e^x \cdot (1) \Rightarrow y'' = 2e^x \cdot (1)$

$LHS = y''(1-x) + y'x - y$

$= 2e^x(1-x) + 2e^x x - 2e^x$

$= 2e^x - 2e^x x + 2e^x x - 2e^x$

$= 0$

$RHS = 0$

$\Rightarrow LHS = RHS$

$\therefore y = 2e^x$ هو حلاً للمعادلة.

س5 (وزاري) بين أن $y = a e^{-x}$ هو حلاً للمعادلة $y' + y = 0$ حيث $a \in R$

$y = ae^{-x} \Rightarrow y' = ae^{-x} \cdot (-1) \Rightarrow y' = -ae^{-x}$

$LHS = y' + y$

$= -ae^{-x} + ae^{-x}$

$= 0$

$RHS = 0$

$\Rightarrow LHS = RHS$

$\therefore y = ae^{-x}$ هو حلاً للمعادلة.

س م: بين أن $y=e^{2x}+e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y''+y'-6y=0$

$y=e^{2x}+e^{-3x}$

$y'=e^{2x}\cdot(2)+e^{-3x}\cdot(-3) \Rightarrow y'=2e^{2x}-3e^{-3x}$ مشتقة أولى

$y''=2e^{2x}\cdot(2)-3e^{-3x}\cdot(-3) \Rightarrow y''=4e^{2x}+9e^{-3x}$ مشتقة ثانية

$LHS=y''+y'-6y$

$=4e^{2x}+9e^{-3x}+2e^{2x}-3e^{-3x}-6(e^{2x}+e^{-3x})$

$=4e^{2x}+9e^{-3x}+2e^{2x}-3e^{-3x}-6e^{2x}-6e^{-3x}$

$=0$

$RHS=0$

$\Longrightarrow LHS=RHS$ ∴ $y=e^{2x}+e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية

س واجب: أثبت أن كلاً من $y=2e^{x}$ و $y=3x$ حل للمعادلة التفاضلية $y''(1-x)+y'x-y=0$

س٢ واجب: بين أن $y=x^2e^{x}-xe^{x}$ هو حلاً للمعادلة $y''-y-4xe^{x}=0$

الاشتقاق يكون حاصل ضرب دالتين لكل حدين

* الاشتقاق الضمني

تكون الدالة ضمنية

① عندما تكون x, y في جهة واحدة

② عندما يكون أس y غير الواحد

③ عندما يكون y زاوية لدالة مثلثية مثل $\sin y$

④ عندما تكون الدالة هي $\ln y$ مثلاً

⑤ عندما تكون الدالة هي $\sqrt{\ }$

ملاحظة عند اشتقاق y نشتق اشتقاق اعتيادي ونضع y' أو $\frac{dy}{dx}$ جنبها.

Ex: ① $5y^2 \xrightarrow{\text{مشتقة}} 10y\cdot y'$

② $7y \longrightarrow 7\cdot y'$

س: بين أن $\ln y^2=x+a$ حلاً للمعادلة $2y'-y=0$ ، $a\in R$

* إذا كانت الدالة ضمنية نقوم بجعل الدالة مشابهة للمعادلة التفاضلية إن أمكن وإلا فهي ليس حلاً للمعادلة

$\ln y^2=x+a$ ضمنية

$\frac{2yy'}{y^2}=1 \Rightarrow \frac{2y'}{y}=1 \Rightarrow 2y'=y$

∴ $\ln y^2=x+a$ حلاً للمعادلة ∴ $2y'-y=0$

س/ هل أن $y^2=3x^2+x^3$ هو حلاً للمعادلة $yy''+(y')^2-3x=5$

ضمنياً $y^2=3x^2+x^3$

$2yy'=6x+3x^2$

$2yy''+y'2y'=6+6x \;]\div 2$

عند الضرب نجمع الأسس

$yy''+y'y'=3+3x$

$yy''+(y')^2-3x=3$

∴ $y^2=3x^2+x^3$ ليس حلاً للمعادلة التفاضلية.

س/ هل أن $yx=\sin 5x$ حلاً للمعادلة $xy''+2y'+25yx=0$

ضمنياً $yx=\sin 5x$

$y(1)+xy'=\cos 5x\cdot(5)$

$y+xy'=5\cos 5x$

$y'+xy''+y'(1)=5(-\sin 5x\cdot(5))$

$xy''+2y'=-25\sin 5x$

$xy''+2y'+25\sin 5x=0$

نعوض مكان $\sin 5x$ ← yx المعطاة في السؤال

$xy''+2y'+25yx=0$

∴ $yx=\sin 5x$ حلاً للمعادلة التفاضلية.

س/ بين أن $\ln|y|=x^2+c$ ، $c\in R$ هو حلاً للمعادلة $y''=4x^2y+2y$

ضمنياً $\ln|y|=x^2+c$

ملاحظ $\ln|y|$ القيمة المطلقة مع $\ln$ يعتبر قوس عادي.

$\frac{y'}{y}=2x$ وسطين x طرفين

$y'=2xy$

$y''=2xy'+y2$

$y''=2xy'+2y$

نعوض بدل $y'=2xy$

$y''=2x(2xy)+2y$

$y''=4x^2y+2y$

∴ $\ln|y|=x^2+c$ حلاً للمعادلة

س/ هل أن $2x^2+y^2=1$ حلاً للمعادلة $y^3y''=-2$

$2x^2+y^2=1$ ضمنية

$4x+2yy'=0 \;]\div 2$

$2x+yy'=0 \longrightarrow yy'=-2x$ (نجد y')

$y'=\frac{-2x}{y}$

$2+yy''+y'y'=0$

$2+yy''+(y')^2=0$ (نعوض قيمة y')

$2+yy''+\left(\frac{-2x}{y}\right)^2=0$

$2+yy''+\frac{4x^2}{y^2}=0 \;]\times y^2$

$2y^2+y^3y''+4x^2=0$

$y^3y''=-4x^2-2y^2$

$y^3y''=-2(2x^2+y^2)$ عامل مشترك

نعوض مكان $2x^2+y^2=1$ المعطاة في السؤال.

$y^3y''=-2(1)$

$y^3y''=-2$

$\therefore$ $2x^2+y^2=1$ حلاً للمعادلة التفاضلية

س/ واجب أثبت كلاً من الدوال الآتية حلاً للمعادلة التفاضلية المقابلة لها.

① $y^3y''+1=0$ ، $x^2+y^2=1$

② $y''-9y=0$ ، $y=\cos 3x+\sin 3x$

③ $x^2y''-2xy'+2y=0$ ، $y=5x^2-3x$

④ $y''-2y-2y^3=0$ ، $y=\cot x$

⑤ $y''(1-x)+xy'=y$ ، $y=4x \;,\; y=5e^{x}$

س/ واجب هل أن الدوال الآتية هي حلاً للمعادلة التفاضلية المقابلة لها.

① $2y'-y=0$ ، $\ln y^2=x+7$

② $xy''-y'=6x^2$ ، $y=2x^3+3x^2$

③ $y''-2y'+y=0$ ، $y=xe^{x}-e^{x}$

④ $x^2y''+3xy'+y=0$ ، $xy=1 \;,\; x\neq 0$

* طرق حل المعادلات

اولاً: المعادلات التي تنفصل متغيراتها

نقوم بوضع الحدود التي تحتوي على x فقط مع dx في جانب والحدود التي تحتوي على y مع dy في جانب آخر ثم نكامل الطرفين وفق الدليل لكل طرف

س/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x+5$

$$\frac{dy}{dx} = 2x+5 \quad] \times dx$$

$$dy = (2x+5)dx$$

يكتب ثابت التكامل c في جهة واحدة فقط

$$\int dy = \int (2x+5)dx \Rightarrow y = \frac{2x^2}{2} + 5x + c \Rightarrow y = x^2+5x+c$$

س/ حل المعادلة $(y^2+4y-1)\acute{y} = x^2-2x+3$

نقوم بتحويل $\acute{y} = \frac{dy}{dx}$ في حل المعادلات التفاضلية

$$(y^2+4y-1)\frac{dy}{dx} = x^2-2x+3 \quad] \times dx$$

$$(y^2+4y-1)dy = (x^2-2x+3)dx$$

$$\int (y^2+4y-1)dy = \int (x^2-2x+3)dx$$

$$\frac{y^3}{3} + 2y^2 - y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + c$$

س/ حل المعادلة $\acute{y} = \frac{x-1}{y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$$

$$y\,dy = (x-1)dx \Rightarrow \int y\,dy = \int (x-1)dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - x + c \quad] \times 2$$

$$y^2 = x^2 - 2x + 2c$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 2x + 2c}$$

س/ حل المعادلة $\frac{dy}{dx}=6x^2-4$ عندما $x=-2,\ y=1$

$\frac{dy}{dx}=6x^2-4\ ]\times dx$

* بعد اكمال عمليتي التكامل و نضع الثابت c نقوم بتعويض قيمتي x,y لكي نجد الثابت c

$dy=(6x^2-4)dx$

$\int dy=\int(6x^2-4)dx$

$y=2x^3-4x+c \longleftarrow x=-2,\ y=1$ نعوض

$1=2(-2)^3-4(-2)+c$

$1=2(-8)+8+c$

$1=-16+8+c \Rightarrow c=9 \qquad \therefore y=2x^3-4x+9$

س/ اوجد حل المعادلة التفاضلية $y'-x\sqrt{y}=0$ عندما $x=2,\ y=9$

$\frac{dy}{dx}-x\sqrt{y}=0$

* لسهولة الحل نقوم بوضع الحد الذي يحتوي على $\frac{dy}{dx}$ في جهة ثم نضرب في dx

$\frac{dy}{dx}=x\sqrt{y}\ ]\times dx$

$dy=x\sqrt{y}\,dx\ ]\div\sqrt{y}$

$\frac{dy}{\sqrt{y}}=x\,dx \Rightarrow \int\frac{dy}{\sqrt{y}}=\int x\,dx \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{2}}dy=\int x\,dx$

$2y^{\frac{1}{2}}=\frac{x^2}{2}+c \Rightarrow 2\sqrt{y}=\frac{x^2}{2}+c \longleftarrow x=2,\ y=9$ نعوض

$2\sqrt{9}=\frac{4}{2}+c \Rightarrow 6=2+c \Rightarrow c=4$

$\therefore 2\sqrt{y}=\frac{x^2}{2}+4\ ]\div 2 \Rightarrow \sqrt{y}=\frac{x^2}{4}+2$ بالتربيع $\Rightarrow y=(\frac{x^2}{4}+2)^2$

س/ حل المعادلة التفاضلية $yy'=4\sqrt{(1+y^2)^3}$

$y\frac{dy}{dx}=4\sqrt{(1+y^2)^3}\ ]\times dx \Rightarrow y\,dy=4\sqrt{(1+y^2)^3}\,dx$

$\frac{y\,dy}{\sqrt{(1+y^2)^3}}=4dx \Rightarrow \int\frac{y\,dy}{\sqrt{(1+y^2)^3}}=\int 4\,dx$

$\int(1+y^2)^{-\frac{3}{2}}y\,dy=\int 4dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int(1+y^2)^{-\frac{3}{2}}2y\,dy=\int 4dx$ Let $y=1+y^2$, $y'=2y$ نعتبرها صح

$\frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{1}(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}=4x+c \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1+y^2}}=4x+c$

س١ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=(x+1)(y-1)$

$$\frac{dy}{dx}=(x+1)(y-1)\ ]\cdot dx$$

$$dy=(x+1)(y-1)dx$$

$$\frac{dy}{y-1}=(x+1)dx \Rightarrow \int\frac{1}{(y-1)}dy=\int(x+1)dx$$

(مشتقتها: 1 ، الدالة: $(y-1)$) ← Let $u=y-1$, $\bar{u}=1$

$$\ln|y-1|=\frac{x^2}{2}+x+c$$

* عند وجود ln في طرف واحد نحذف ln من هذا الطرف ونرفع e في الطرف الآخر

$$|y-1|=e^{\frac{x^2}{2}+x+c}$$

* عند رفع المطلق نرفع إشارة ± الى الطرف الآخر

$$y-1=\pm e^{\frac{x^2}{2}+x+c}$$

$$y=1\pm e^{\frac{x^2}{2}+x+c}$$

س٢ حل المعادلة $\frac{dy}{dx}=x^2y-xy$

$$\frac{dy}{dx}=x^2y-xy\ ]\cdot dx$$

$$dy=(x^2y-xy)dx \Rightarrow dy=y(x^2-x)dx$$

(عامل مشترك)

$$\frac{dy}{y}=(x^2-x)dx \Rightarrow \int\frac{1}{y}dy=\int(x^2-x)dx$$

$$\ln|y|=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+c \Rightarrow |y|=e^{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+c}$$

$$\therefore y=\pm e^{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+c}$$

س٣ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(x+1)\frac{dy}{dx}=2y$

* عند وجود ln في طرفين نرفع الى الثابت c ln فيصبح ln|c| فاذا كان معامل ln واحد نقوم بتحويل الجمع الى ضرب ثم نحذف ln من الطرفين.

$$(x+1)\frac{dy}{dx}=2y\ ]\cdot dx$$

$$(x+1)dy=2y\,dx$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{2}{(x+1)}dx \Rightarrow \int\frac{1}{y}dy=2\int\frac{1}{(x+1)}dx$$

(مشتقتها: 1 ، الدالة: $(x+1)$)

$$\ln|y|=2\ln|x+1|+\ln|c| \Rightarrow \ln|y|=\ln|(x+1)^2|+\ln|c|$$

$$\ln|y|=\ln|c(x+1)^2| \Rightarrow y=\pm c(x+1)^2$$

س٤ حل المعادلة $x\frac{dy}{dx}=2y$

$$x\frac{dy}{dx}=2y \quad]\times dx$$

$$x\,dy=2y\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{2}{x}dx$$

$$\int\frac{1}{y}dy=2\int\frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln|y|=2\ln|x|+\ln|c|$$

$$\ln|y|=\ln|(x)^2|+\ln|c| \Rightarrow \ln|y|=\ln|cx^2|$$

$$y=\pm x^2c$$

س حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}+xy=3x$ ، $x=1$, $y=2$

$$\frac{dy}{dx}+xy=3x$$

* لسهولة الحل نقوم بوضع الحد الذي يحتوي على $\frac{dy}{dx}$ في جهة ثم نضرب في dx

$$\frac{dy}{dx}=3x-xy \quad]\times dx$$

$$dy=(3x-xy)dx \Rightarrow dy=x(3-y)dx$$

عامل مشترك

$$\frac{dy}{(3-y)}=x\,dx \Rightarrow -\int\frac{-1}{3-y}dy=\int x\,dx \Rightarrow -\ln|3-y|=\frac{x^2}{2}+c$$

عندما $x=1$, $y=2$

$$-\ln|3-2|=\frac{1^2}{2}+c \Rightarrow -\ln|1|=\frac{1}{2}+c \Rightarrow 0=\frac{1}{2}+c \Rightarrow c=\frac{-1}{2}$$

$$\therefore\ -\ln|3-y|=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2} \quad]\times(-1)$$ الضرب في (-1)

$$\ln|3-y|=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2} \Rightarrow 3-y=\pm e^{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y=3\mp e^{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}}$$

س جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $xy\frac{dy}{dx}+y^2=1-y^2$

$$xy\frac{dy}{dx}=1-y^2-y^2 \Rightarrow xy\frac{dy}{dx}=1-2y^2 \quad]\times dx$$

$$xy\,dy=(1-2y^2)dx \Rightarrow \frac{y}{1-2y^2}dy=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{y}{1-2y^2}dy=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{-1}{4}\int\frac{-4y}{1-2y^2}dy=\int\frac{1}{x}dx \Rightarrow \frac{-1}{4}\ln|1-2y^2|=\ln|x|+c$$

س/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$

$\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$

$\sin x \cos y \frac{dy}{dx} = -\cos x \sin y \,] \times dx$

$(\sin x \cos y)dy = (-\cos x \sin y)dx$

$\frac{\cos y}{\sin y} dy = \frac{-\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$\ln|\sin y| = -\ln|\sin x| + \ln|c|$

$\ln|\sin y| + \ln|\sin x| = \ln|c|$

$\ln|\sin y \sin x| = \ln|c| \Rightarrow \sin y \sin x = \pm c$

س/ حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{\cos^2 y}{x}$, $y = \frac{\pi}{4}$, $x = 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{x} \Rightarrow x\,dy = \cos^2 y\, dx \Rightarrow \frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{x}$

$\int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \sec^2 y\, dy = \int \frac{1}{x} dx$ (مباشر)

$\tan y = \ln|x| + c$ عندما $y = \frac{\pi}{4}$, $x = 1$

$\tan\frac{\pi}{4} = \ln|1| + c \Rightarrow 1 = 0 + c \Rightarrow c = 1$

$\therefore \tan y = \ln|x| + 1$

س/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = -2x \tan y$, $y = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$

$\frac{dy}{dx} = -2x \tan y \,] \times dx \Rightarrow dy = -2x \tan y\, dx \Rightarrow \frac{dy}{\tan y} = -2x\,dx$

$\int \frac{1}{\tan y} dy = \int -2x\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{\frac{\sin y}{\cos y}} dy = \int -2x\,dx \Rightarrow \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \int -2x\,dx$

$\ln|\sin y| = -x^2 + c$ عندما $y = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$

$\ln|\sin\frac{\pi}{2}| = 0 + c$

$\ln|1| = c \Rightarrow c = 0$ $\therefore \ln|\sin y| = -x^2 + 0 \Rightarrow \sin y = \pm e^{-x^2}$

س/ حل المعادلة التفاضلية $dy = \sin x \cos^2 y \, dx$

$dy = \sin x \cos^2 y \, dx$

$\frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x \, dx \Longrightarrow \int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \int \sin x \, dx$

$\int \sec^2 y \, dy = \int \sin x \, dx \Rightarrow \frac{1}{(1)} \tan y = \frac{-1}{(1)} \cos x + c \Rightarrow \tan y = -\cos x + c$

مباشر

س/ حل المعادلة التفاضلية $y' \cos^3 x = \sin x$

$\frac{dy}{dx} \cos^3 x = \sin x \,] \times dx \Longrightarrow dy \cos^3 x = \sin x \, dx \Longrightarrow dy = \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

$\int dy = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx \Longrightarrow \int dy = \int \cos^{-3} x \sin x \, dx$

$y = \frac{-1}{(1)} \cdot \frac{\cos^{-2} x}{-2} + c \Longrightarrow y = \frac{1}{2 \cos^2 x} + c \Longrightarrow y = \frac{1}{2} \sec^2 x + c$

س/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 y$

$\frac{dy}{dx} = \cos^2 x \cos^2 y \,] \times dx \Longrightarrow dy = \cos^2 x \cos^2 y \, dx$

$\frac{dy}{\cos^2 y} = \cos^2 x \, dx \Longrightarrow \int \frac{1}{\cos^2 y} dy = \int \cos^2 x \, dx$

قانون نصف الزاوية

$\int \sec^2 y \, dy = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x\right) dx \Longrightarrow \frac{1}{(1)} \tan y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + c$

$\tan y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + c$

س/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $x \cos^2 y \, dx + \tan y \, dy = 0$

$x \cos^2 y \, dx + \tan y \, dy = 0 \Longrightarrow \tan y \, dy = -x \cos^2 y \, dx$

$\frac{\tan y}{\cos^2 y} dy = -x \, dx \Longrightarrow \int \frac{\tan y}{\cos^2 y} dy = \int -x \, dx$

$\int \tan y \cdot \frac{1}{\cos^2 y} dy = \int -x \, dx \Longrightarrow \int \tan y \cdot \sec^2 y \, dy = \int -x \, dx$

مشتقة (تمهل)

$\frac{1}{(1)} \cdot \frac{\tan^2 y}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$

ممكن الحل بأكثر من طريقة حاول الحل

س/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\tan^2 y\, dy = \sin^3 x\, dx$

$\tan^2 y\, dy = \sin^3 x\, dx \Rightarrow \int \tan^2 y\, dy = \int \sin^3 x\, dx$

قانون   أحادية أس فردي

$\int (\sec^2 y - 1)\, dy = \int \sin x \sin^2 x\, dx$

$\int (\sec^2 y - 1)\, dy = \int \sin x (1 - \cos^2 x)\, dx$

$\int (\sec^2 y - 1)\, dy = \int (\sin x - \cos^2 x \sin x)\, dx$

$\frac{1}{1}\tan y - y = \frac{-1}{1}\cos x - \frac{-1}{1}\cdot\frac{\cos^3 x}{3} + c$

$\tan y - y = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$

س/ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2 + e^y}$ وسطين × طرفين

$(3y^2 + e^y)\, dy = \cos x\, dx \Rightarrow \int (3y^2 + e^y)\, dy = \int \cos x\, dx$

$\frac{3y^3}{3} + e^y = \frac{1}{1}\sin x + c \Rightarrow y^3 + e^y = \sin x + c$

س/ حل المعادلة التفاضلية $y' = 2e^x y^3$, $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$

$\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3 \;] \cdot dx \Rightarrow dy = 2e^x y^3\, dx$

$\frac{dy}{y^3} = 2e^x\, dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^3} = \int 2e^x\, dx \Rightarrow \int y^{-3}\, dy = 2\int e^x\, dx$

$\frac{y^{-2}}{-2} = 2e^x + c \Rightarrow \frac{-1}{2y^2} = 2e^x + c$ عندما $x = 0, y = \frac{1}{2}$

$\frac{-1}{2(\frac{1}{4})} = 2e^0 + c \Rightarrow \frac{-1}{\frac{1}{2}} = 2(1) + c \Rightarrow -2 = 2 + c \Rightarrow c = -4$

$\therefore \frac{-1}{2y^2} = 2e^x - 4$

س/ حل المعادلة التفاضلية

$e^{x} dx - y^{3} dy = 0$

$e^{x} dx - y^{3} dy = 0 \Rightarrow e^{x} dx = y^{3} dy \Rightarrow y^{3} dy = e^{x} dx$

$\int y^{3} dy = \int e^{x} dx \Rightarrow \frac{y^{4}}{4} = e^{x} + c \;]\times 4$

$y^{4} = 4e^{x} + 4c \Rightarrow y = \pm\sqrt[4]{4e^{x} + 4c}$

س/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$e^{x+2y} + y' = 0$

$e^{x+2y} + \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -e^{x+2y} \;]\times dx$

$dy = -e^{x+2y} dx \Rightarrow dy = -e^{x} \cdot e^{2y} dx \Rightarrow \frac{dy}{e^{2y}} = -e^{x} dx$

$\int \frac{1}{e^{2y}} dy = \int -e^{x} dx \Rightarrow \int e^{-2y} dy = \int -e^{x} dx \Rightarrow \frac{-1}{2}\int e^{-2y}(-2) dy = -\int e^{x} dx$

$\frac{-1}{2} e^{-2y} = -e^{x} + c \;]\times(-2) \Rightarrow e^{-2y} = 2e^{x} - 2c \Rightarrow \ln e^{-2y} = \ln|2e^{x} - 2c|$

نأخذ ln للطرفين

$-2y = \ln|2e^{x} - 2c| \;]\div(-2)$

$\therefore y = \frac{-1}{2}\ln|2e^{x} - 2c|$

* ملاحظة

$\ln e^{-2y} = -2y \ln e = -2y(1) = -2y$

س/ حل المعادلة

$\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ $x = 0 \;,\; y = 0$

$\frac{dy}{dx} = e^{2x+y} \;]\times dx$

$dy = e^{2x+y} dx \Rightarrow dy = e^{2x} \cdot e^{y} dx \Rightarrow \frac{dy}{e^{y}} = e^{2x} dx \Rightarrow \int \frac{dy}{e^{y}} = \int e^{2x} dx$

$\int e^{-y} dy = \int e^{2x} dx \Rightarrow -\int e^{-y}(-1) dy = \frac{1}{2}\int e^{2x} \cdot 2dx$

$-e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} + c$ عندما $x=0, y=0$ $\Rightarrow -e^{0} = \frac{1}{2} e^{0} + c$

$-1 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -1 - \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{-3}{2}$ $\therefore -e^{-y} = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{3}{2} \;]\times(-1)$

$e^{-y} = \frac{3}{2} - \frac{e^{2x}}{2}$ نأخذ ln للطرفين $\Rightarrow \ln e^{-y} = \ln\left|\frac{3 - e^{2x}}{2}\right|$

$-y = \ln\left|\frac{3 - e^{2x}}{2}\right| \;]\times(-1) \Rightarrow y = -\ln\left|\frac{3 - e^{2x}}{2}\right|$

واجب: حل كلاً من المعادلات التفاضلية

① $\frac{dy}{dx} = e^{3y+2x}$, $x=0$, $y=0$

② $\frac{dy}{dx} = e^{2x}$. $x=0$, $y=0$

③ $\tan x \frac{dy}{dx} = \csc y \sin x$

④ $\sqrt{y - yx}\,\frac{dy}{dx} - 1 = 0$, $x=-3$, $y=9$

⑤ $x^4 y \frac{dy}{dx} - 3x^2 = 1$

⑥ $\cot y\, dy + \sin^2 y\, dx = 0$

ثانياً: المعادلات التفاضلية المتجانسة

بعض المعادلات التفاضلية لا يمكن أن نفصل متغيراتها اي لا يمكن أن نجعل الحدود التي تحتوي على x مع dx والحدود التي تحتوي على y مع dy . لذلك يمكن تحويلها الى معادلة قابلة للفصل وذلك باستخدام بعض التحويلات ومن هذه الصور هي المعادلة التفاضلية المتجانسة وهي المعادلة التي يمكن كتابتها بالصورة $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ولحل هذه الاسئلة نتبع مايلي .

① نقوم بجعل الحد $\frac{dy}{dx}$ وحده في جهة والحدود الاخرى في جهة أخرى .

② نقسم كل حد من حدود المعادلة على x لأكبر اس موجود في المعادلة . فيكون ناتج كل حد من الحدود هو أما عدد (ثابت) أو $\frac{y}{x}$ أو $\frac{y^2}{x^2}$ أو $\frac{y^3}{x^3}$ أو ---- . بحيث يكون أس x, y متساوي وهذا دليل على أنها متجانسة

③ نعوض مكان كل $\frac{y}{x} \longrightarrow v$ وتعتبر هذه معادلة رقم واحد ($v = \frac{y}{x}$)

④ نشتق $y = xv$ كحاصل ضرب دالتين فيكون الناتج $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \quad (2)$ وهذه معادلة رقم اثنين وهذه المعادلة ثابتة في كل المعادلات

⑤ نساوي معادلة ① = ② ونقوم بفصل المتغيرات ثم نكامل

⑥ في نهاية الحل نقوم بتعويض مكان كل $v \longleftarrow \frac{y}{x}$

* ملاحظة لكيفية معرفة أن المعادلة التفاضلية متجانسة
اذا كان مجموع أس y مع أس x في كل حد هو نفس الاس فأنها متجانسة.

مثال

① $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ (الاس 2 ، الاس 2 ، مجموع الاس 2)

② $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}$ (مجموع الاس 3 ، الاس 3 ، الاس 3)

س/ حل المعادلة التفاضلية $\acute{y} = \dfrac{3y^2 - x^2}{2xy}$

نقسم بسط ومقام الطرف الايمن على x لأكبر أس $\therefore$ يكون $x^2 \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \text{Let } v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} \text{ -------- } ①$$

$$v = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = xv \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \text{ (1) -------- } ②$$

نشتق بالنسبة الى x

هذه المعادلة ثابتة في كل المعادلات المتجانسة

$$② = ① \Longrightarrow x\frac{dv}{dx} + v = \frac{3v^2 - 1}{2v}$$

نجعل مساواة بين الطرفين الايمن للمعادلتين ثم نقوم بنقل v الى الطرف الايمن ونبسط الطرف الايمن فقط

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1}{2v} - \frac{v}{1}$$ نوحد مقامات

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{3v^2 - 1 - 2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v} \xrightarrow{\text{وسطين × طرفين}} (v^2 - 1)\,dx = 2vx\,dv$$ بفصل المتغيرات

ينتج $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{2v}{v^2 - 1}\,dv$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2v}{v^2 - 1}\,dv$$

* ملاحظة ممكن عدم كتابة الفقرة اعلاه بأن نقوم بقلب النسب للطرفين وندفع dv للطرف الآخر

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2v}{v^2 - 1}\,dv$$

$$\ln|x| = \ln|v^2 - 1| + \ln|c|$$

$$\ln|x| = \ln|c(v^2 - 1)|$$

$$x = \pm c(v^2 - 1)$$

$$x = \pm c\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)$$

نقوم بتعويض مكان $v = \dfrac{y}{x}$

س/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$

نقسم الطرف الايمن للبسط والمقام على $x^2 \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \text{Let } v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} \text{------} (1)$$

$$v = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = xv \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \text{------} (2)$$

نشتق بالنسبة الى x

$$(2) = (1) \Longrightarrow x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1+v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2v} - \frac{v}{1}$$ نوحد مقامات

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{2v}$$ بفصل المتغيرات

$$\frac{dx}{x} = \frac{2v}{1-v^2}\,dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{-2v}{1-v^2}\,dv$$

$$\ln|x| = -\ln|1-v^2| + \ln|c|$$

$$\ln|x| = \ln|(1-v^2)^{-1}| + \ln|c|$$

$$\ln|x| = \ln|c(1-v^2)^{-1}|$$

$$x = \pm c(1-v^2)^{-1}$$

$$x = \pm \frac{c}{1-v^2} \Longrightarrow x = \pm \frac{c}{1-\frac{y^2}{x^2}}$$

س/ حل المعادلة التفاضلية $(y^2-x^2)dx + xy\,dy = 0$

$$xy\,dy = -(y^2-x^2)dx \Rightarrow xy\,dy = (x^2-y^2)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-y^2}{xy}$$

نقسم البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ (الطرف الأيمن)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}} \qquad \text{Let } v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-v^2}{v} \quad \text{-----} \ ①$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \quad \text{-----} \ ②$$

$$② = ① \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1-v^2}{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2}{v} - \frac{v}{1}$$ توحيد مقامات

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v^2-v^2}{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-2v^2}{v}$$ بفصل المتغيرات

$$\frac{dx}{x} = \frac{v}{1-2v^2}dv$$

$$\int\frac{dx}{x} = \frac{-1}{4}\int\frac{-4v}{1-2v^2}dv$$

Let $u = 1-2v^2$

$\bar{u} = -4v$

نقص هو -4

$$\ln|x| = \frac{-1}{4}\ln|1-2v^2| + \ln|c|$$

$$\ln|x| = \ln|(1-2v^2)^{\frac{-1}{4}}| + \ln|c|$$

$$\ln|x| = \ln|c(1-2v^2)^{\frac{-1}{4}}|$$

$$x = \pm c(1-2v^2)^{\frac{-1}{4}}$$

$$x = \pm\frac{c}{\sqrt[4]{(1-2v^2)}} \Rightarrow x \pm \frac{c}{\sqrt[4]{(1-2(\frac{y^2}{x^2}))}}$$

س / عامه حل المعادلة التفاضلية $(x^2+3y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

$$2xy\,dy = (x^2+3y^2)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3y^2}{2xy}$$ نقسم الطرف الايمن البسط والمقام على $x^2 \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$ Let $v = \frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+3v^2}{2v} \quad \text{------} ①$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \quad \text{------} ②$$

$$② = ① \quad x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1+3v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2}{2v} - \frac{v}{1}$$ نوحد مقامات

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+1}{2v}$$ بفصل المتغيرات

$$\frac{dx}{x} = \frac{2v}{v^2+1}\,dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2v}{v^2+1}\,dv$$

$$\ln|x| = \ln|v^2+1| + \ln|c|$$

$$\ln|x| = \ln|c(v^2+1)|$$

$$x = \pm c(v^2+1)$$

$$x = \pm c\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)$$

س/ حل المعادلة التفاضلية $x^2y\,dx=(x^3+y^3)\,dy$

$(x^3+y^3)dy=x^2y\,dx$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y}{x^3+y^3}$ نقسم الطرف الايمن البسط والمقام على $x^3\neq 0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^3}$ Let $v=\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{v}{1+v^3}$ ------ ①

$v=\frac{y}{x}\Rightarrow y=xv\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$ ----- ②

② = ① $\Rightarrow x\frac{dv}{dx}+v=\frac{v}{1+v^3}$

$x\frac{dv}{dx}=\frac{v}{1+v^3}-\frac{v}{1}$ نوحد مقامات

$x\frac{dv}{dx}=\frac{v-v-v^4}{1+v^3}$

$x\frac{dv}{dx}=\frac{-v^4}{1+v^3}$ بفصل المتغيرات $\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1+v^3}{-v^4}dv$

$\int\frac{dx}{x}=-\int v^{-4}(1+v^3)dv\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=-\int(v^{-4}+v^{-1})dv$

لا يمكن التكامل

$\int\frac{dx}{x}=-\int(v^{-4}+\frac{1}{v})dv$

$\ln|x|=-(\frac{v^{-3}}{-3}+\ln|v|)+c$ نضرب بالاشارة

$\ln|x|=\frac{1}{3v^3}-\ln|v|+c$

$\ln|x|=\frac{1}{3\frac{y^3}{x^3}}-\ln|\frac{y}{x}|+c$

$\ln|x|+\ln|\frac{y}{x}|=\frac{x^3}{3y^3}+c$

$\ln|x\cdot\frac{y}{x}|=\frac{x^3}{3y^3}+c\Rightarrow\ln|y|=\frac{x^3}{3y^3}+c\Rightarrow y=\pm e^{\frac{x^3}{3y^3}+c}$

س/ حل المعادلة التفاضلية $(x+2y)dx+(2x+3y)dy=0$

$$(2x+3y)dy=-(x+2y)dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x-2y}{2x+3y}$$ نقسم الطرف الايمن البسط والمقام على $x\neq 0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1-2(\frac{y}{x})}{2+3(\frac{y}{x})} \qquad \text{Let } v=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1-2v}{2+3v} \quad \text{------} \ ①$$

$$v=\frac{y}{x}\Rightarrow y=xv\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v \quad \text{------} \ ②$$

$$② = ① \Rightarrow x\frac{dv}{dx}+v=\frac{-1-2v}{2+3v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v}{2+3v}-v$$ توحيد مقامات

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v-2v-3v^2}{2+3v}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-4v-3v^2}{2+3v}$$ بفصل المتغيرات

$$\frac{dx}{x}=\frac{2+3v}{-1-4v-3v^2}dv\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int\frac{2+3v}{-(1+4v+3v^2)}dv$$

$$\frac{dx}{x}=-\int\frac{2+3v}{(1+4v+3v^2)}dv$$

Let $u=1+4v+3v^2$

$u'=4+6v$

$u'=2(2+3v)$

النقص هو 2

$$\int\frac{dx}{x}=\frac{-1}{2}\int\frac{2(2+3v)}{1+4v+3v^2}dv$$

$$\ln|x|=\frac{-1}{2}\ln|1+4v+3v^2|+\ln|c|$$

$$\ln|x|=\ln|(1+4v+3v^2)^{\frac{-1}{2}}|+\ln|c|$$

$$\ln|x|=\ln|c(1+4v+3v^2)^{\frac{-1}{2}}|$$

$$x=\pm c(1+4v+3v^2)^{\frac{-1}{2}}$$

$$x=\pm c\left[1+4(\frac{y}{x})+3(\frac{y}{x})^2\right]^{\frac{-1}{2}}\Rightarrow x=\pm\frac{c}{\sqrt{1+4(\frac{y}{x})+3(\frac{y}{x})^2}}$$

س/ حل المعادلة التفاضلية $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0$

$$x^2 dy = -(y^2 - xy)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}$$ نقسم الطرف الايمن البسط والمقام على $x^2 \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1}$$ Let $v = \frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = v - v^2 \text{-----} ①$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \text{-----} ②$$

بفصل المتغيرات $② = ① \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + \cancel{v} = \cancel{v} - v^2 \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = -v^2$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-1}{v^2}dv \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{-1}{v^2}dv \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = -\int v^{-2}dv$$

$$\ln|x| = -\frac{v^{-1}}{-1} + c \Rightarrow \ln|x| = \frac{1}{v} + c$$

$$\ln|x| = \frac{1}{\frac{y}{x}} + c \Rightarrow \ln|x| = \frac{x}{y} + c \Rightarrow x = \pm e^{\frac{x}{y} + c}$$

س/ عاشرة حل المعادلة التفاضلية $xy' = y - x$ عندما $x = 1, y = 1$

$$xy' = y - x \Rightarrow y' = \frac{y-x}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{1}$$ نقسم البسط والمقام للطرف الايمن على $x \neq 0$

Let $v = \frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = v - 1 \text{-----} ①$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \text{------} ②$$

بفصل المتغيرات $② = ① \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + \cancel{v} = \cancel{v} - 1 \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = -1$

$$\frac{dx}{x} = -1\,dv \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int -1\,dv \Rightarrow \ln|x| = -v + c$$

$\ln|x| = -\frac{y}{x} + c$ عندما $x=1, y=1$

تابع ←

$$\ln|1| = \frac{-1}{1} + c \Rightarrow 0 = -1 + c \Rightarrow c = 1$$

$$\therefore \ln|x| = \frac{-y}{x} + 1 \Rightarrow x = \pm e^{\frac{-y}{x} + 1}$$

س جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $2x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2x^2}$$ نقسم الطرفين الايمن للبسط والمقام على $x^2 \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2}$$ Let $v = \frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v^2}{2} \quad \text{......(1)}$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \quad \text{......(2)}$$

$$(2) = (1) \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1+v^2}{2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2} - \frac{v}{1}$$ نوحد مقامات

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2-2v}{2}$$ بفصل المتغيرات مع ترتيب المقام

$$\frac{dx}{x} = \frac{2}{v^2-2v+1}dv$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{2}{v^2-2v+1}dv \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{2}{(v-1)^2}dv$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int 2(v-1)^{-2}dv \Rightarrow \ln|x| = 2\,\frac{(v-1)^{-1}}{-1} + c$$

$$\ln|x| = \frac{-2}{(v-1)} + c \Rightarrow \ln|x| = \frac{-2}{\frac{y}{x}-1} + c$$

$$\ln|x| = \frac{-2}{\frac{y-x}{x}} + c \Rightarrow \ln|x| = -2\left(\frac{x}{y-x}\right) + c$$

$$x = \pm e^{-2\left(\frac{x}{y-x}\right) + c}$$

س / حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$

نقسم الطرف الايمن بسط والمقام على $x \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1} \quad \text{Let } v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v+1}{v-1} \quad \text{------} \ (1)$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \quad \text{------} \ (2)$$

$$(2) = (1) \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = \frac{v+1}{v-1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1}{v-1} - \frac{v}{1}$$ نوحد مقامات

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1-v^2+v}{v-1}$$ بعزل المتغيرات مع ترتيب المقام

$$\frac{dx}{x} = \frac{v-1}{2v-v^2+1}dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{v-1}{2v-v^2+1}dv$$

Let $u = 2v - v^2 + 1$

$u' = 2 - 2v$

$u' = 2(1-v)$

هناك نقص في مشتقة المقام العدد (2) مع اشارة سالبه

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{-1}{2}\int \frac{-2(v-1)}{2v-v^2+1}dv$$

$$\ln|x| = \frac{-1}{2}\ln|2v-v^2+1| + \ln|c|$$

$$\ln|x| = \ln|(2v-v^2+1)^{-\frac{1}{2}}| + \ln|c|$$

$$\ln|x| = \ln|c(2v-v^2+1)^{-\frac{1}{2}}|$$

$$x = \pm c\left(2\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} + 1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = \pm \frac{c}{\sqrt{2\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} + 1}}$$

س/ حل المعادلة $(3x-y)y' = x+y$

$$(3x-y)y' = x+y \Rightarrow y' = \frac{x+y}{3x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{3x-y}$$

نقسم الطرف الايمن البسط والمقام على $x \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{3-\frac{y}{x}} \quad \text{Let } v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \text{ ------ } ①$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \text{ ----- } ②$$

$$② = ① \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1+v}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} - \frac{v}{1}$$ نوحد مقامات

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v}$$ بفصل المتغيرات مع الترتيب

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{3-v}{v^2-2v+1}dv \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{-(v-3)}{(v-1)^2}dv$$

(حد اول، حد ثاني)

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{v-1-2}{(v-1)^2}dv \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = -\int\left[\frac{(v-1)}{(v-1)^2} - \frac{2}{(v-1)^2}\right]dv$$

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\left[\frac{1}{v-1} - 2(v-1)^{-2}\right]dv$$

$$\ln|x| = -\left[\ln|v-1| - 2\frac{(v-1)^{-1}}{-1}\right] + c$$

$$\ln|x| = -\left[\ln|v-1| + \frac{2}{v-1}\right] + c$$

نضرب بالاشارة السالبة

$$\ln|x| = -\ln\left|\frac{y}{x}-1\right| - \frac{2}{\frac{y}{x}-1} + c$$

$$\ln|x| + \ln\left|\frac{y}{x}-1\right| = \frac{-2}{\frac{y}{x}-1} + c$$

$$\ln\left|x\left(\frac{y}{x}-1\right)\right| = \frac{-2}{\frac{y}{x}-1} + c \Rightarrow \ln|y-x| = \frac{-2}{\frac{y}{x}-1} + c$$

$$y = \pm e^{\frac{-2}{\frac{y}{x}-1}+c} + x$$

س/ حل المعادلة التفاضلية $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

* ملاحظة اذا كانت $\frac{y}{x}$ أس الى e أو زاوية الى دالة مثلثية فهي دالة متجانسة وتكون جاهزة للعوض بدلالة v

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} \quad \text{Let } v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = v + e^{v} \text{------} ①$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \text{-----} ②$$

$$② = ① \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = v + e^{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = e^{v} \quad \text{بفصل المتغيرات}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{e^{v}} dv \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int e^{-v}(-1) dv$$

$$\ln|x| = -e^{-v} + c \Rightarrow \ln|x| = \frac{-1}{e^{v}} + c \Rightarrow \ln|x| = \frac{-1}{e^{\frac{y}{x}}} + c$$

س/ حل المعادلة التفاضلية $x\left(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}\right) = y$

يجب وضع $\frac{dy}{dx}$ وحدها في جهة

$$x\left(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}\right) = y \;]\div x$$

$$\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x} \quad \text{Let } v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = v + \tan v \text{------} ①$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \text{------} ②$$

$$② = ① \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = v + \tan v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \tan v \quad \text{بفصل المتغيرات}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{\tan v} dv \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{\frac{\sin v}{\cos v}} dv \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{\cos v}{\sin v} dv$$

$$\ln|x| = \ln|\sin v| + \ln|c| \Rightarrow \ln|x| = \ln|c \sin v|$$

$$x = \pm c \sin v \Rightarrow x = \pm c \sin\frac{y}{x}$$

س/ حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{1+\sin\frac{y}{x}}{\cos\frac{y}{x}}$$

$$\text{Let } v=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=v+\frac{1+\sin v}{\cos v}\text{ ------ (1)}$$

$$v=\frac{y}{x}\Rightarrow y=xv\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v\text{ ----- (2)}$$

$$(2)=(1)\quad x\frac{dv}{dx}+\cancel{v}=\cancel{v}+\frac{1+\sin v}{\cos v}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+\sin v}{\cos v}$$

بفصل المتغيرات

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{\cos v}{1+\sin v}dv\Rightarrow \ln|x|=\ln|1+\sin v|+\ln|c|$$

$$\ln|x|=\ln|c(1+\sin v)|\Rightarrow x=\pm c\left(1+\sin\frac{y}{x}\right)$$

س/ حل المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\cos^2\frac{y}{x}$$

$$\text{Let } v=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=v+\cos^2 v\text{ ------ (1)}$$

$$v=\frac{y}{x}\Rightarrow y=xv\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v\text{ ------ (2)}$$

$$(2)=(1)\Rightarrow x\frac{dv}{dx}+\cancel{v}=\cancel{v}+\cos^2 v\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\cos^2 v$$

بفصل المتغيرات

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{1}{\cos^2 v}dv\Rightarrow\int\frac{dx}{x}=\int\sec^2 v\,dv\Rightarrow\ln|x|=\tan v+c$$

$$\ln|x|=\tan\frac{y}{x}+c\Rightarrow x=\pm e^{\tan\frac{y}{x}+c}$$

س/ أوجد حل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y\sin\frac{y}{x}}{x\sin\frac{y}{x}}$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sin^2\frac{y}{x}$

(3) $x\left(\frac{dy}{dx}-\cos\frac{y}{x}\right)=y$

(4) $x e^{2\frac{y}{x}}\frac{dy}{dx}=y e^{2\frac{y}{x}}+x$

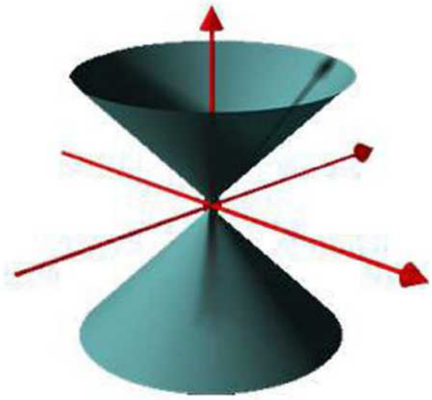
(5) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+e^{4\frac{y}{x}}$

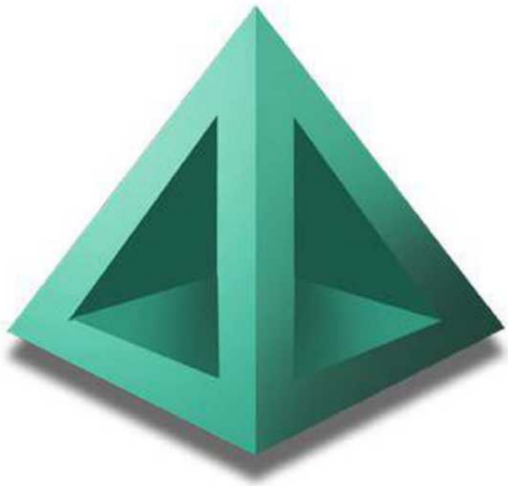
(6) $2y\acute{y}-2x-y-x\acute{y}=0$

(7) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$

2017

رحلة التفوق في السادس
عطاءً بلا حدود





إعداد الأستاذ: عبدالكريم جبر

مساعد الطالب في الرياضيات للصف السادس العلمي

الفصل السادس
الهندسة الفضائية

@رحلة التفوق في السادس

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون﴾

انطلاقا من قول المصطفى (ص): ((زكاة العلم نشرهُ وتعليمهُ))

تضع شبكة مواقع رحلة التفوق في السادس التعليمية التربوية الخيرية بيـن ايديكم احدى اعمالها من ملازم مرحلة السادس الأعدادي هذه المرحلة الهامة والمصيرية في حياة اعزائنا الطلبة وخاصة المتعففين منهم ولمن يتعذر عليه اقتناء هذه المساعدات المدرسية في محافظاتنا العراقية العزيزة بهدف النهوض وتطوير الواقع التعليمي ولو بالجزء اليسير.

إذ أن شبكتنا لاتقتصر عاى نشر الملازم المدرسية فقط أنما تقوم بنشـر الدروس المرئية المجانية لأكفأ التدريسيين بالأضافة الـى مجموعة قنواتنا التـدريسية وكذلك الأرشادات والنصائح وطـرق الدراسـة الصحيحة هذا من جهة. أما من جهة أخرى فهو كـسر لشـوكة بعض المحسـوبين علـى الكـادر التدريسي ممن يرفضـون نشـر ملازمهم والتعـاون مع ابنائهم الطلبة ليأخذوا من المال هدفا أهم ويتناسوا مصلحة الطالب والواقع التعليمي المتدني.

علماً ان كـادر الشـبكة والقائمين عليها هم مجموعة من الشـباب العراقي الواعي المثقف بالأضافة الى تعـاون بعض المدرسين الكرام كما واننا غير تابعين لأي جهة كانت رسمية او غير رسـمية انما سر تجمعنا وعملنا هو خيري بحت آملين من الله عز وجل ان يوفقنا لتقديم كل ما هو صالح لشعبنا و وطننا الحبيب.

كادر شبكة رحلة التفوق في السادس

٢٠١٥/٨/٢١

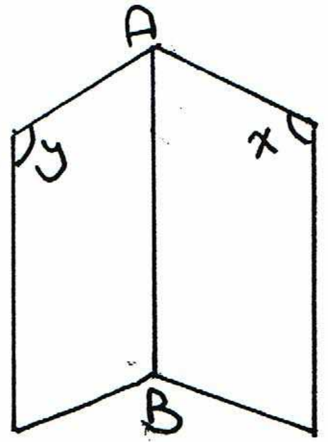


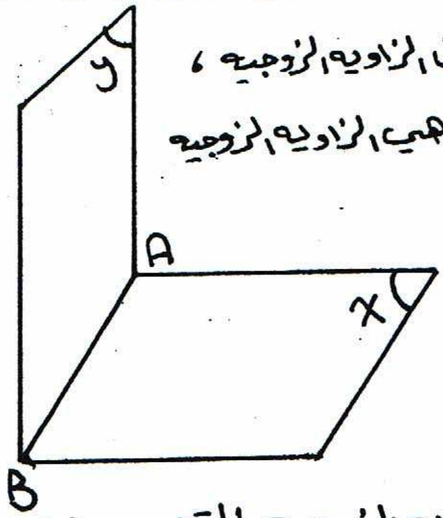
الفصل السادس
الهندسة الفضائية

استاذ عبد الكريم جبر
٠٧٨٠٣٠٠٢١٤٠

* **الزاوية الزوجية:** هي اتحاد نصفي مستويين لهما حافة مشتركة تسمى (حرف الزاوية الزوجية) ويسمى كل من نصفي المستويين (وجه الزاوية الزوجية).

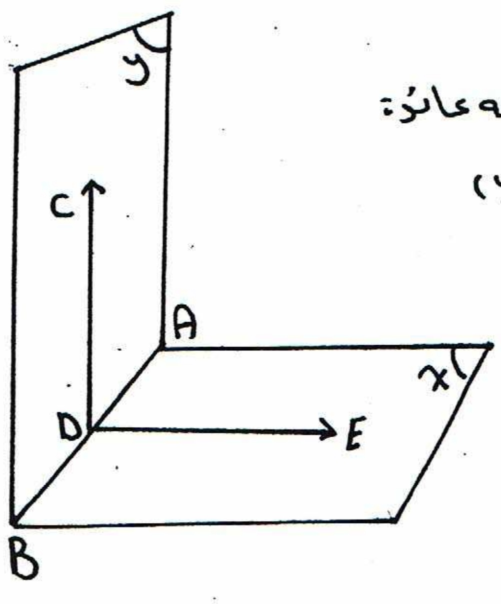
حيث $\overleftrightarrow{AB}$ هو حرف الزاوية الزوجية ،
(X) ، (Y) وجهي الزاوية الزوجية





ويعبر عن الزاوية الزوجية بالتعبير $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$
او بالحرف $\overleftrightarrow{AB}$ فقط

* **الزاوية العائدة:** هي اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكلا منهما في احد وجهي الزاوية الزوجية.



من خلال الشكل فان $\sphericalangle CDE$ هي زاوية عائدة للزاوية الزوجية $(Y) - \overleftrightarrow{AB} - (X)$
اذا تحقق كل من

① $\overleftrightarrow{DE} \subset (X) , \overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (عمود)

② $\overleftrightarrow{CD} \subset (Y) , \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

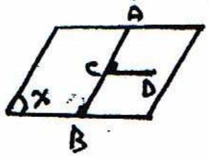
ملاحظة علاقة الزاوية الزوجية بالعائدة:-

① قياس الزاوية العائدة = قياس الزاوية الزوجية.

② اذا تعامد مستويان فالزاوية الزوجية قائمة ($90°$) وبالعكس.

بعض المبرهنات والبديهيات نستفاد منها في دراسة الهندسة

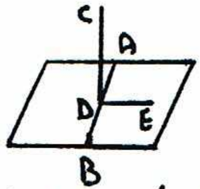
① في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة.



$\overleftrightarrow{CD} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

② المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما



$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB} \\ \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}\end{array}\right] \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$$

③ المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي.

$$\overleftrightarrow{CD} \perp (X) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB} \\ \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}\end{array}\right.$$

④ يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة.

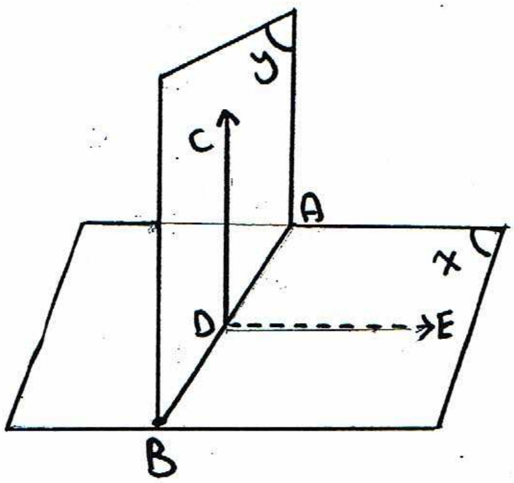
⑤ يتقاطع المستويان بخط مستقيم.

⑥ مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة (محتوى في كليهما)

⑦ لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما

⑧ لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما.

مبرهنة 7 اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر.



المعطيات

$(X) \perp (Y)$

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y) , \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ في نقطة D

المطلوب اثباته

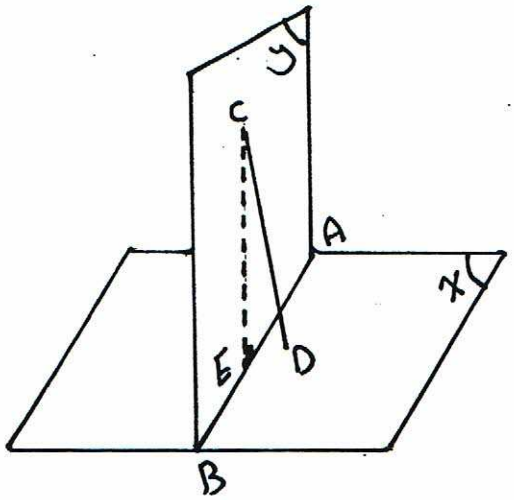
$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

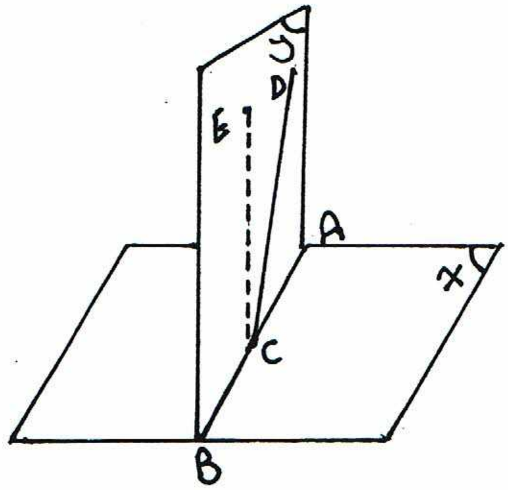
البرهان

نرسم $\overleftrightarrow{DE} \subset (X) , \overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$	[في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة]
$\overleftrightarrow{CD} \subset (Y) , \overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AB}$	[معطى]
∴ $\overleftrightarrow{AB}$ عائدة للزاوية الزوجية $\measuredangle CDE$	[تعريف الزاوية العائدة (يذكر التعريف)]
∵ $(Y) \perp (X)$	[معطى]
∴ قياس الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB} = 90^\circ$	[اذا تعامد مستويان فالزاوية الزوجية قائمة]
∴ العائدة $\measuredangle CDE = 90^\circ$	[قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة وبالعكس]
∴ $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$	[لان قياس الزاوية بينهما $= 90^\circ$]
∵ $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$	[معطى]
∴ $CD \perp (X)$	[المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما]

و.هـ.م

نتيجة مبرهنة 7 : اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في احدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوى فيه .





المعطيات

$(y) \perp (x)$, $C \in (y)$

$\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

المطلوب اثباته

$\overleftrightarrow{CD} \subset (y)$

البرهان

ليكن $(y) \cap (x) = \overleftrightarrow{AB}$ [يتقاطع المستويان بخط مستقيم]

أن لم يكن $\overleftrightarrow{CD} \subset (y)$

من نقطة C نرسم $\overleftrightarrow{CE} \subset (y), \overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ [في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة]

$\because (y) \perp (x)$ [معطى]

$\therefore \overleftrightarrow{CE} \perp (x)$ [مبرهنة 7: اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر]

$\because \overleftrightarrow{CD} \perp (x)$ [معطى]

هذا غير ممكن

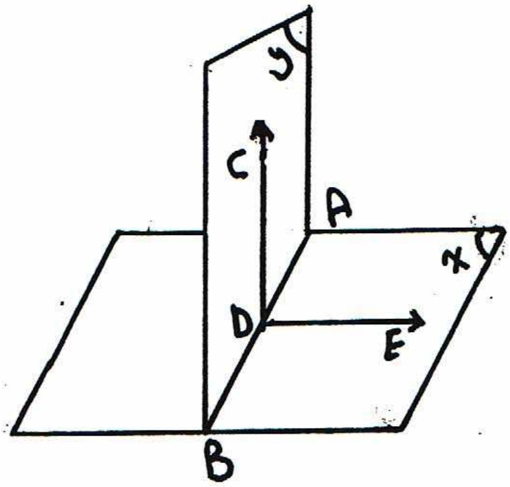
$\therefore$ يجب أن يكون $\overleftrightarrow{CD} = \overleftrightarrow{CE}$ [يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة]

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \subset (y)$

و.هـ.م

مبرهنة 8: كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي.

أو يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر.



المعطيات

$\overleftrightarrow{CD} \subset (y)$

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المطلوب اثباته

$(y) \perp (X)$

البرهان

ليكن $(y) \cap (X) = \overleftrightarrow{AB}$ [يتقاطع المستويان بخط مستقيم]

ولتكن $B \in \overleftrightarrow{AB}$ [مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة]

نرسم $\overleftrightarrow{DE} \subset (X)$, $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ [في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة]

$\because \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ [معطى]

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{DE}$ [المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي]

$\because \overleftrightarrow{CD} \subset (y)$ [معطى]

$\therefore$ $\measuredangle CDE$ عائدة للزوجية $\overleftrightarrow{AB}$ [حسب تعريف الزاوية العائدة (يذكر التعريف)]

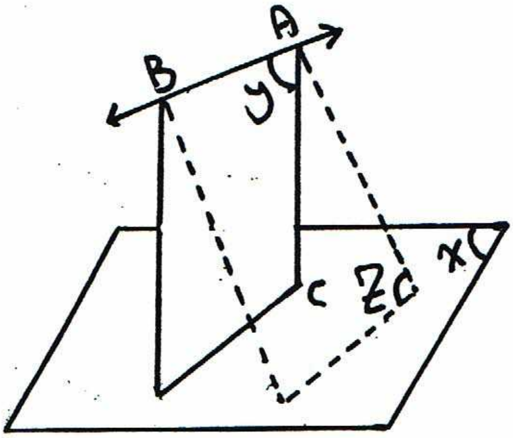
$\therefore \measuredangle CDE = 90^\circ$ [لأن $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$]

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB} = 90^\circ$ [قياس الزاوية الزوجية = قياس الزاوية العائدة، وبالعكس]

$\therefore (y) \perp (X)$ [يتعامد المستويان اذا كانت الزاوية الزوجية بينهما قائمة]

و.هـ.م

مبرهنة 9 : من مستقيم غير عمودي على مستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم



المعطيات

$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)

المطلوب اثباته

ايجاد مستوٍ وحيد يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ ويكون عمودي على (X) .

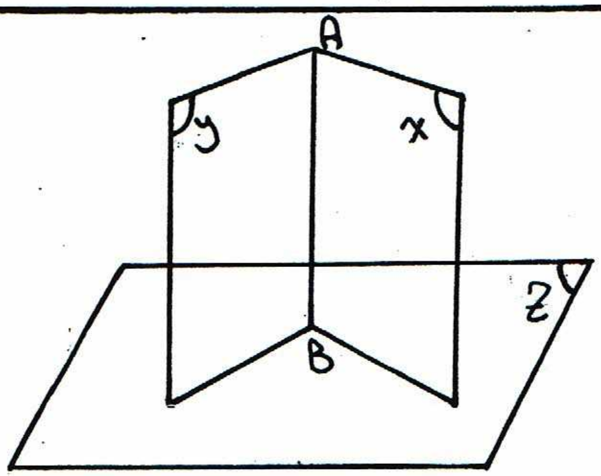
البرهان

من نقطة A نرسم $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$	[يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة]
∴ $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان	
∴ يوجد مستوٍ مثل (Y) يحويهما	[لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما]
∴ $(Y) \perp (X)$	[مبرهنة 8 : يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر]

ولبرهنة الوحدانية

نفرض (Z) مستوٍ آخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ ويكون عمودي على (X) .	
∴ $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$	[بالبرهان]
∴ $\overleftrightarrow{AC} \subset (Z)$	[نتيجة مبرهنة 7 : اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في احدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوى فيه]
هذا غير ممكن	
∴ $(Y) = (Z)$	[لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما]

نتيجة مبرهنة ٩: اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فأن مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث .



المعطيات

$(y)\cap(x)=\overleftrightarrow{AB}$

$(y),(x)\perp(Z)$

المطلوب اثباته

$\overleftrightarrow{AB}\perp(Z)$

البرهان

ان لم يكن $\overleftrightarrow{AB}\perp(Z)$

∴ اصبح لدينا كل من $(x),(y)$ يحويان $\overleftrightarrow{AB}$ وعموديان على (Z)

وهذا غير ممكن

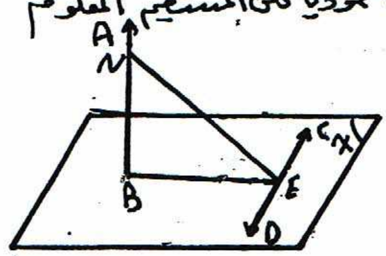
∴ $\overleftrightarrow{AB}\perp(Z)$

[مبرهنة ٩: من مستقيم غير عمودي على مستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم]

و.هـ.م

---

* مراجعة مبرهنة الاعمدة الثلاثة: اذا رسم من نقطة في مستوٍ مستقيمان احدهما عمودي على المستوي والاخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي فالمستقيم الواصل بين اية نقطة من نقط المستقيم العمودي على المستوي ونقطة تلاقي المستقيمين يكون عمودياً على المستقيم المعلوم في المستوي



$B\in(X)$

$\overleftrightarrow{CD}\subset(X)$

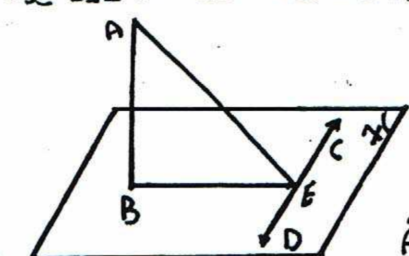
$\overleftrightarrow{AB}\perp(X)$

$\overleftrightarrow{BE}\perp\overleftrightarrow{CD}$

$\Rightarrow \forall N\in\overleftrightarrow{AB}\Rightarrow\overleftrightarrow{NE}\perp\overleftrightarrow{CD}$

---

* نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة: اذا رسم من نقطة لا تنتمي الى مستوٍ معلوم مستقيمان احدهما عمودي على المستوي والاخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي، فالمستقيم الواصل بين أثري العموديين يكون عمودياً على المستقيم المعلوم في المستوي .



$A\notin(X)$

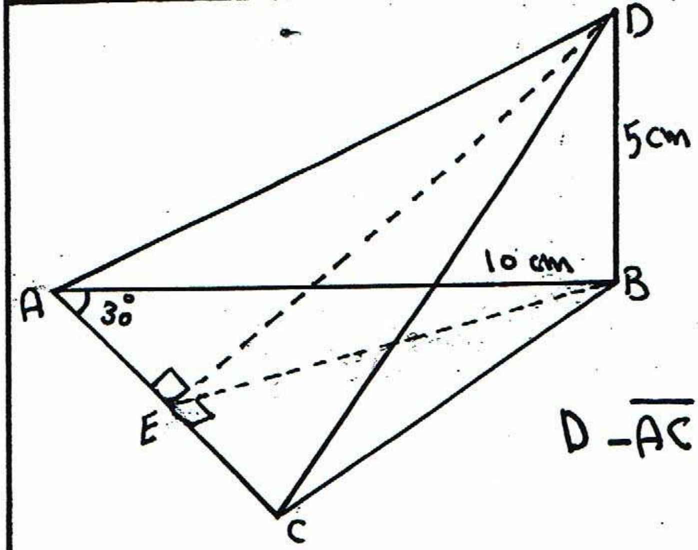
$\overleftrightarrow{CD}\subset(X)$

$\overleftrightarrow{AB}\perp(X)$

$\overleftrightarrow{AE}\perp\overleftrightarrow{CD}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BE}\perp\overleftrightarrow{CD}$

مثال / في $\triangle ABC$ ، $AB = 10\,cm$ ، $BD = 5\,cm$ ، $\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $m\angle A = 30^\circ$
جد قياس الزاوية الزوجية $D-\overline{AC}-B$



المعطيات في $\triangle ABC$

$\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $m\angle A = 30^\circ$

$AB = 10\,cm$ ، $BD = 5\,cm$

المطلوب إثباته

ايجاد قياس الزاوية الزوجية $D-\overline{AC}-B$

البرهان

نرسم من نقطة E

$\overline{BE} \subset (ABC)$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AC}$	[في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة]
∵ $\overline{BD} \perp (ABC)$	[معطى]
∴ $\overline{DE} \perp \overline{AC}$	[مبرهنة الأعمدة الثلاث]
∴ $\angle DEB$ عائدة للزاوية الزوجية $\overline{AC}$	[تعريف الزاوية العائدة]
∵ $\overline{BD} \perp (ABC)$	[معطى]
∴ $\overline{BD} \perp \overline{BE}$	[المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي]

∴ $\triangle DBE$ قائم الزاوية في B

في $\triangle BEA$ القائم في E ⟵ $\sin 30^\circ = \frac{\text{مقابل } BE}{\text{وتر } AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5\,cm$

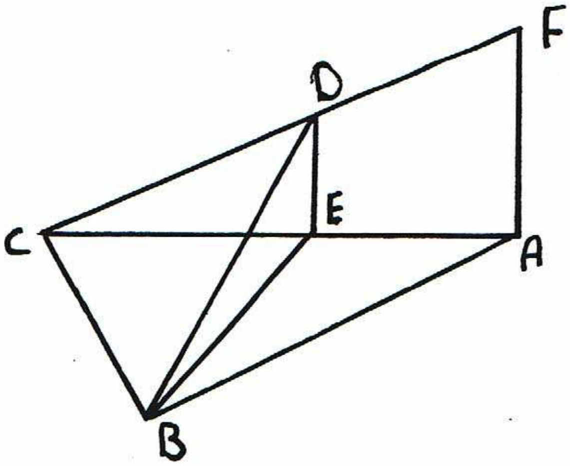
في $\triangle DBE$ القائم الزاوية في B ⟵ $\tan(D\hat{E}B) = \frac{\text{مقابل } BD}{\text{مجاور } BE} = \frac{5}{5} = 1$

∴ $m\angle DEB = 45^\circ$ العائدة

∴ قياس الزاوية الزوجية $\overline{AC} = 45^\circ$ [قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة وبالعكس]

و . هـ . م

مثال: ليكن ABC مثلثاً وليكن $\overline{AF} \perp (ABC)$ ، $\overline{BD} \perp \overline{CF}$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AC}$
برهن أن $\overline{BE} \perp (CAF)$ ، $\overline{ED} \perp \overline{CF}$



المعطيات

في $\triangle ABC$ $\quad \overline{AF} \perp (ABC)$

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$

المطلوب اثباته

① $\overline{BE} \perp (CAF)$

② $\overline{ED} \perp \overline{CF}$

البرهان

$\because \overline{AF} \perp (ABC)$ [معطى]

$\therefore (CAF) \perp (ABC)$ [مبرهنة 8 : يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر]

$\because \overline{BE} \perp \overline{AC}$ [معطى]

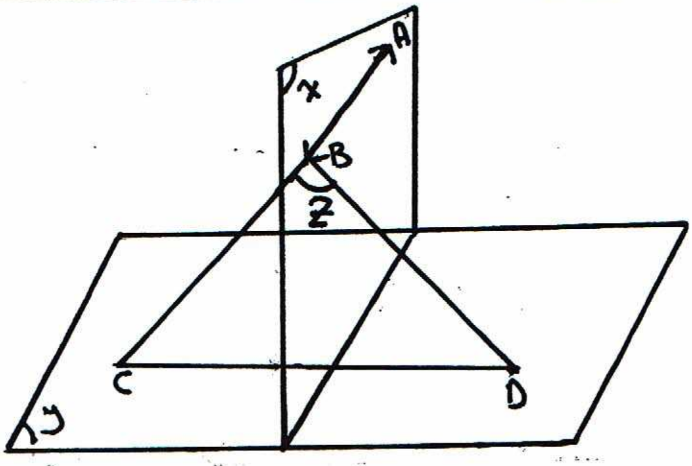
$\therefore$ ① $\overline{BE} \perp (CAF)$ [مبرهنة 7 : اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر]

$\because \overline{BD} \perp \overline{CF}$ [معطى]

$\therefore$ ② $\overline{ED} \perp \overline{CF}$ [نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة]

و.هـ.م

مثال ٣: (x) ، (y) مستويان متعامدان ، $\overleftrightarrow{AB} \subset (x)$ ، $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (y) في C, D على الترتيب برهن أن $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$



المعطيات

$(x) \perp (y)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (x)$

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$

ويقطعان (y) في C, D على الترتيب

المطلوب إثباته $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

البرهان

∵ $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ متقاطعان

∴ يوجد مستوٍ مثل (Z) يحتويهما [لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما]

∵ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ [معطى]

∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ [المستقيم العمودي على مستقيمين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما]

∵ $\overleftrightarrow{AB} \subset (x)$ [معطى]

∴ $(x) \perp (Z)$ [مبرهنة 8: يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر]

∵ $(x) \perp (y)$ [معطى]

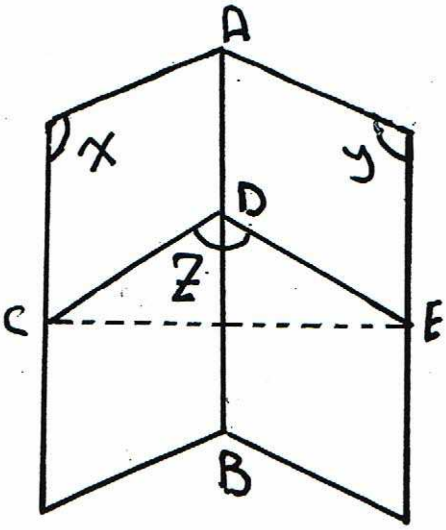
ولما كان $(Z) \cap (y) = \overleftrightarrow{CD}$ [لانه محتوى في كل منهما]

∴ $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$ [نتيجة مبرهنة ١:٩ اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث]

و.هـ.م

(تمارين ١-٦)

س/ برهن أن مستوي الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها



المعطيات

$\measuredangle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$

(Z) مستوي الزاوية العائدة.

المطلوب اثباته

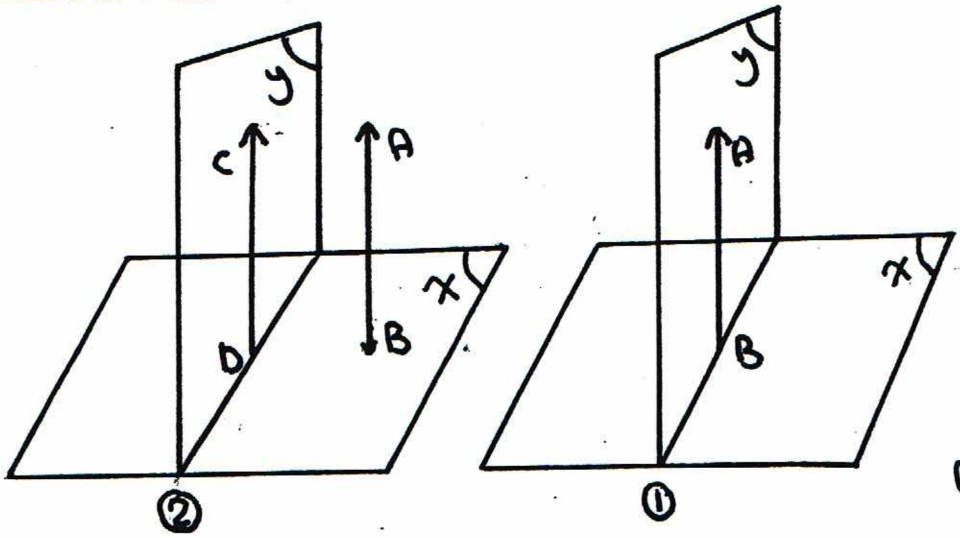
$(Z) \perp \overleftrightarrow{AB}$

البرهان

$\because$ $\measuredangle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$	[معطى]
$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$	[تعريف العائدة: هي اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في احد وجهي الزاوية الزوجية]
$\therefore$ $(Z) \perp \overleftrightarrow{AB}$	[المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما]

و.هـ.م

س2/ برهن انه اذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستوٍ آخر فأن المستويين متعامدان .



المعطيات

$\overleftrightarrow{AB} \parallel (y)$ يوازي

$\overleftrightarrow{AB} \perp (x)$

المطلوب اثباته

$(y) \perp (x)$

البرهان

① اذا كان $\overleftrightarrow{AB} \subset (y)$

$\therefore (y) \perp (x)$ [مبرهنة 8: يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر]

② $\overleftrightarrow{AB} \cap (y) = \phi$

لتكن $C \in (y)$

وليكن $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ [يمكن رسم مستقيم موازٍ لمستقيم معلوم من نقطة معلومة]

$\because \overleftrightarrow{AB} \parallel (y)$ [معطى]

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \subset (y)$ [اذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فالمستقيم المرسوم من اية نقطة من نقاط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستوي]

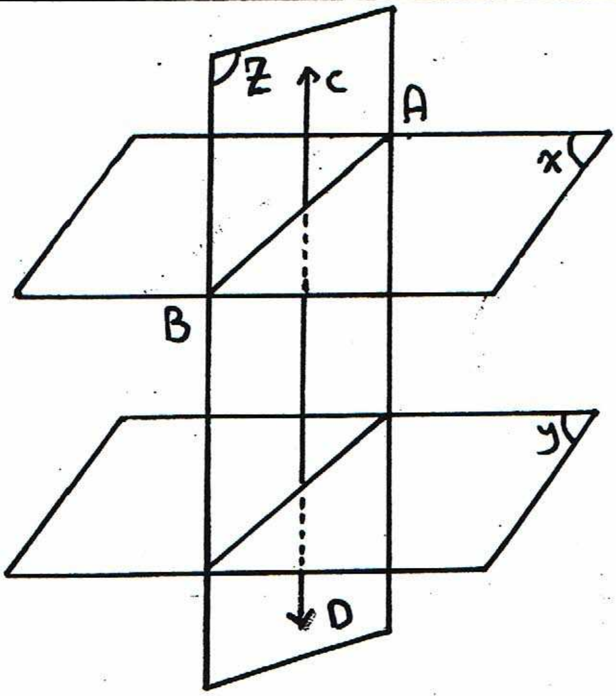
$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (x)$ [معطى]

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (x)$ [المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر]

$\therefore (y) \perp (x)$ [مبرهنة 8: يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر]

و . هـ . م

س3 برهن أن المستوي العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر ايضاً.



المعطيات

$(X) \parallel (Y)$

$(Z) \perp (X)$

المطلوب اثباته

$(Z) \perp (Y)$

البرهان

$(Z) \cap (X) = \overleftrightarrow{AB}$ [يتقاطع المستويان بخط مستقيم]

نرسم $\overleftrightarrow{CD} \subset (Z)$ ، $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ [في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة]

$\because (Z) \perp (X)$ [معطى]

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ [مبرهنة 7: اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر]

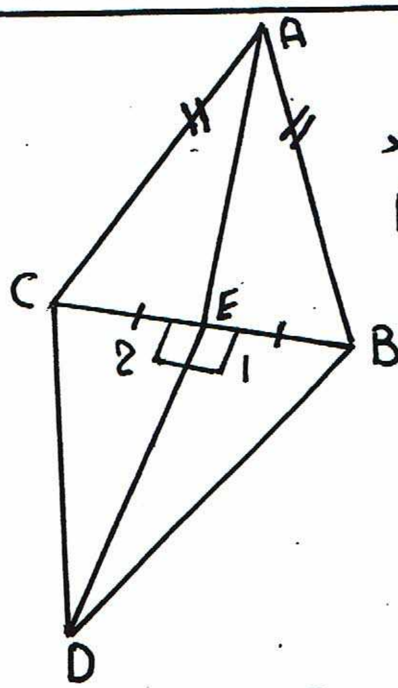
$\because (X) \parallel (Y)$ [معطى]

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (Y)$ [المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر]

$\therefore (Z) \perp (Y)$ [مبرهنة 8: يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر]

و.هـ.م

س4/ A , B , C , D اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $\overline{AB} = \overline{AC}$ ، $E \in \overline{BC}$ فاذا كانت $\measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BC}$ برهن $CD = BD$



المعطيات

A , B , C , D اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد

$E \in \overline{BC}$ ، $AB = AC$

$\measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BC}$

المطلوب اثباته

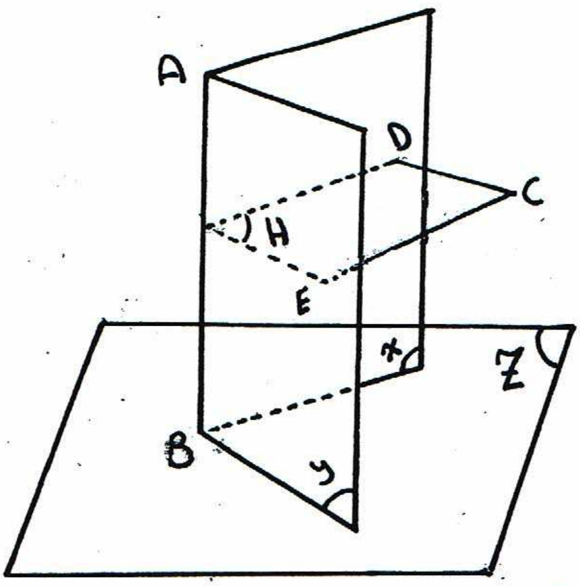
$\overline{CD} = \overline{BD}$

البرهان

∵ $\measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BC}$	[معطى]
∴ $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ $\overline{DE} \perp \overline{BC}$	[تعريف الزاوية العائدة يذكر التعريف]
∵ $\overline{AB} = \overline{AC}$	[معطى]
∴ $\overline{CE} = \overline{EB}$	[العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها]
في المثلثين DEB , DEC فيهما	
$m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2 = 90°$	[لان $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ بالبرهان]
$\overline{CE} = \overline{EB}$	[بالبرهان]
$\overline{DE}$ مشترك	
∴ يتطابق المثلثين	[يتطابق المثلثين بضلعين وزاوية]
∴ $\overline{CD} = \overline{BD}$	

و.هـ.م

س5 برهن أنه إذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً وكانا عموديين على مستويين متقاطعين فأن مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم .



المعطيات

$\overleftrightarrow{CD} , \overleftrightarrow{CE} \parallel (Z)$

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$, $\overleftrightarrow{CE} \perp (Y)$

$(Y) \cap (X) = \overleftrightarrow{AB}$

المطلوب اثباته

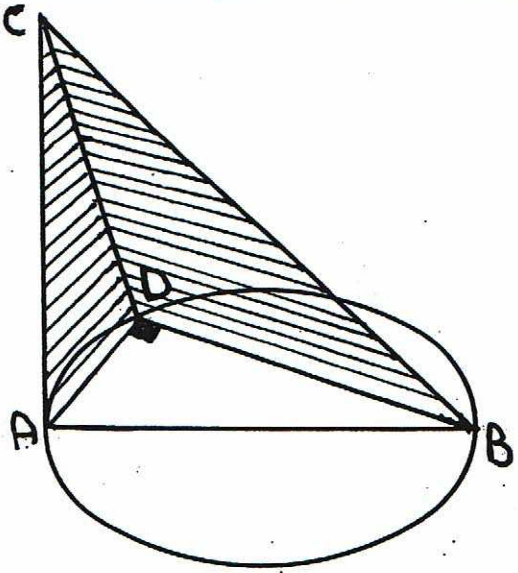
$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان

العبارة	السبب
∵ $\overleftrightarrow{CE}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$ متقاطعان	[معطى]
∴ يوجد مستوٍ وحيد مثل (H) يحويهما	[لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما]
∵ $\overleftrightarrow{CD} , \overleftrightarrow{CE} \parallel (Z)$	[معطى]
∴ $(H) \parallel (Z)$	[اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً فأن مستويهما يوازي المستوي المعلوم]
$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$ $\overleftrightarrow{CE} \perp (Y)$	[معطى]
∴ $(H) \perp (X) , (Y)$	[مبرهنة 8 : يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر]
∵ $(Y) \cap (X) = \overleftrightarrow{AB}$	[معطى]
∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp (H)$	[نتيجة مبرهنة 9 : اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فأن مستقيم تقاطعهما يكون عمودي على المستوي الثالث]
∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$	[المستقيم العمودي على مستويين متوازيين يكون عمودياً على المستوي الآخر]

و . هـ . م

س/ دائرة قطرها $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة
برهن أن (CDA) عمودي على (CDB)



المعطيات

دائرة قطرها $\overline{AB}$

$\overline{AC}$ عمودي على مستويها

D تنتمي للدائرة

المطلوب اثباته

$(CDA) \perp (CDB)$

البرهان

∵ $\overline{AB}$ قطر الدائرة [معطى]

∴ $m\measuredangle ADB = 90^\circ$ [الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة قائمة]

∴ $\overline{AD} \perp \overline{DB}$ ...①

∵ $\overline{AC}$ عمودي على مستوي الدائرة [معطى]

∴ $\overline{CD} \perp \overline{DB}$ ...② [مبرهنة الاعمدة الثلاثة]

من ① ، ②

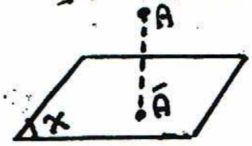
∴ $\overline{DB} \perp (CDA)$ [المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما]

∴ $(CDA) \perp (CDB)$ [مبرهنة 8 : يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر]

و.هـ.م

الاسقاط العمودي على مستوٍ

مسقط نقطة على مستوي: هو أثر العمود المرسوم من النقطة الى ذلك المستوي .



أن مسقط النقطة A
هو النقطة Á

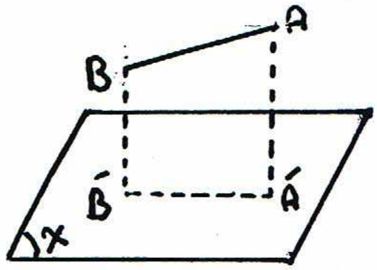
مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ (غير عمودية)

هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم

ليكن $\overline{AB}$ غير عمودي على (X)

نرسم $\overline{A\acute{A}} \perp (X)$ [يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة]

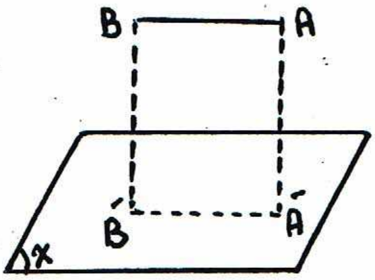
$\overline{B\acute{B}} \perp (X)$



∴ Á هي مسقط A على (X)

∴ B́ هي مسقط B على (X)

∴ مسقط $\overline{AB}$ على (X) هو $\overline{\acute{A}\acute{B}}$



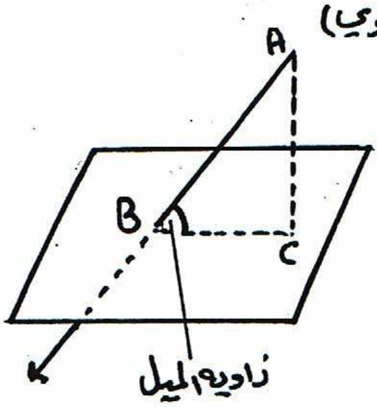
ملاحظة: اذا كان $\overline{AB} \parallel (X)$

فأن $\overline{AB} = \overline{\acute{A}\acute{B}}$

مسقط قطعة مستقيم مائله على مستوي (اي قاطعه للمستوي)

ليكن $\overleftrightarrow{AB}$ مائلاً على (X) في B ، $B \in (X)$ ، $A \notin (X)$

نرسم $\overline{AC} \perp (X)$ [يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة]



∴ C هي مسقط A على (X)

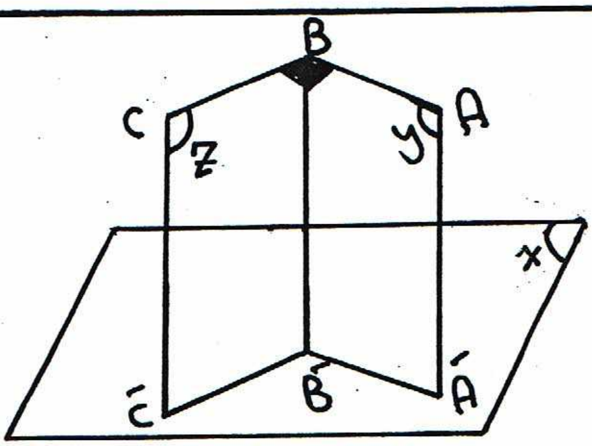
∴ B هي مسقط نفسها على (X)

∴ $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

ملاحظة

زاوية الميل : هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي

مثال: اذا وازى احد ضلعي زاوية قائمة مستوياً معلوماً فأن مسقطي ضلعيها على المستوي متعامدان



المعطيات

$\measuredangle ABC$ زاوية قائمة في B

$\overline{AB} \parallel (X)$

$\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{B'C'}$ هو مسقط $\overline{BC}$ على (X)

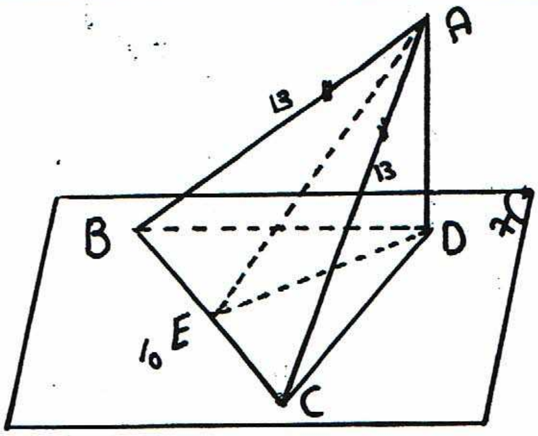
المطلوب اثباته $\overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$

البرهان

$\because$ $\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$	[معطى]
$\because$ $\overline{B'C'}$ هو مسقط $\overline{BC}$	
$\therefore$ $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'} \perp (X)$	[مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ : هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم]
$\therefore$ $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$ ، $\overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$	[المستقيمان العمودان على مستوٍ واحد متوازيان]
ليكن (Y) ، (Z) يحتويان المستقيمات المتوازية	[لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما]
$\because$ $\overline{AB} \parallel (X)$	[معطى]
$(Y) \cap (X) = \overline{A'B'}$	[يتقاطع المستويان بخط مستقيم]
$\therefore$ $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$	[اذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فانه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي والمستويات والمستويات التي تحوي المستقيم]
$\overline{BB'} \perp \overline{A'B'}$	[المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستوي]
$\overline{AB} \perp \overline{BB'}$	[في المستوي الواحد : المستقيم العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر]
لكن $\overline{AB} \perp \overline{BC}$	[لأن $\measuredangle ABC = 90°$ معطى]
$\therefore$ $\overline{AB} \perp (Z)$	[المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما]
$\therefore$ $\overline{A'B'} \perp (Z)$	[المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر]
$\therefore$ $\overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$	[المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستوي]

و . هـ . م

مثال٤/ ABC مثلث ، $\overline{BC} \subset (X)$ والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث ABC والمستوي (X) قياسها 60° فاذا كان $AB = AC = 13\,cm$ ، $BC = 10\,cm$ جد مسقط المثلث (ABC) على (X) ثم جد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)



المعطيات

$\triangle ABC$, $\overline{BC} \subset (X)$

الزاوية الزوجية $60^\circ = \overline{BC}$ ، $\overline{BC} = 10$

$\overline{AB} = \overline{AC} = 13$

المطلوب اثباته ايجاد مسقط $\triangle ABC$ على (X)

وايجاد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

البرهان

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ [يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة]

∴ $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$

$\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$

$\overline{BC}$ مسقط نفسه على (X) [تعريف مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ: هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العموديين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم]

∴ $\triangle BCD$ مسقط $\triangle ABC$ على (X)

في (ABC) نرسم $\overline{BC} \perp \overline{AE}$ [في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة]

∵ $AC = AB$ [معطى]

∴ $\overline{EC} = \overline{BE} = 5$ [العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها]

∴ $\overline{ED} \perp \overline{BC}$ [نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة]

∴ $\angle DEA$ عائدة للزوجية $\overline{BC}$ [تعريف الزاوية العائدة]

∵ قياس الزاوية الزوجية $60^\circ = \overline{BC}$ [معطى]

∴ $m\angle DEA = 60^\circ$ العائدة [قياس الزاوية العائدة = قياس الزاوية الزوجية وبالعكس]

في $\triangle AEB$ القائم في E

$(BE)^2 + (AE)^2 = (AB)^2$ [فيثاغورس]

$(5)^2 + (AE)^2 = (13)^2 \Rightarrow AE = 12$

في $\triangle AED$ القائم في D

$\cos 60^\circ = \frac{ED \text{ مجاور}}{AE \text{ وتر}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12}$

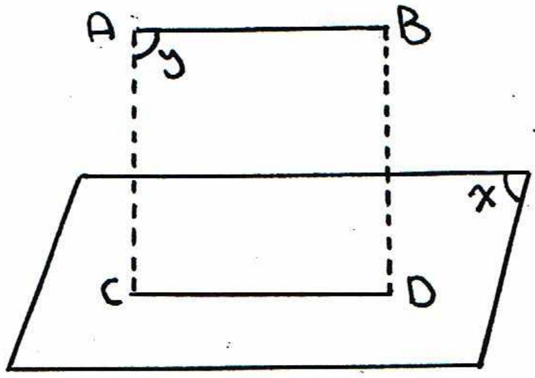
∴ $ED = 24$

∴ مساحة $\triangle BCD = \frac{1}{2}(10)(6) = 30\,cm^2$

و.هـ.م

تمارين (2 - 6)

س٤/ برهن أن طول قطعة المستقيم الموازي لمستوٍ معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه



المعطيات

$\overline{AB} \parallel (x)$

$\overline{CD}$ مسقط $\overline{AB}$ على (x)

المطلوب إثباته

① $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

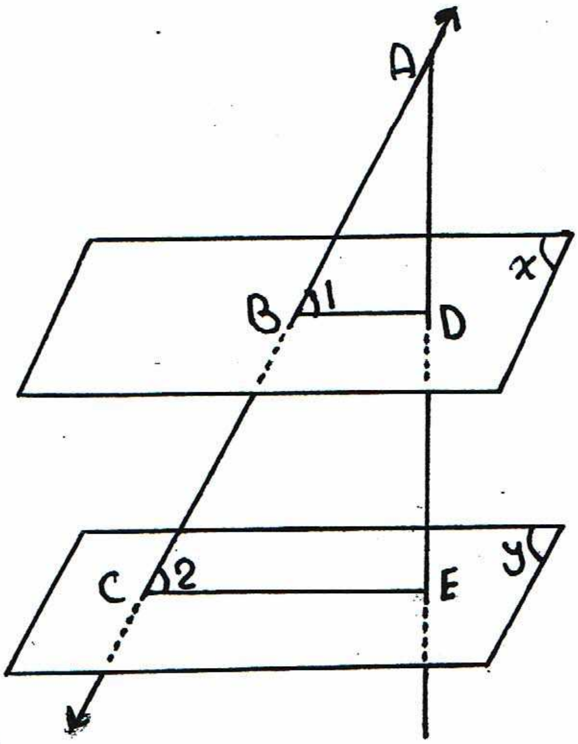
② $\overline{AB} = \overline{CD}$

البرهان

العبارة	السبب
∵ $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AB}$ على (x)	[معطى]
∴ $\overline{AC} , \overline{BD} \perp (x)$	[تعريف مسقط قطعة مستقيم للمستوي إهو قطعة المستقيم المحددة بأثري العموديين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم]
∴ $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$	[المستقيمان العمودان على مستوٍ واحد متوازيان]
ليكن (y) يحوي المستقيمان المتوازيان	[لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما]
∵ $\overline{AB} \parallel (x)$	[معطى]
∴ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ①	[اذا وازى مستقيم مستوياً فانه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحوي هذا المستقيم]
∴ الشكل $ABCD$ متوازي اضلاع	[لتوازي كل ضلعين متقابلين فيه]
∴ $\overline{AB} = \overline{CD}$ ②	[من خواص متوازي الاضلاع]

و . هـ . م

س2 برهن أنه اذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فأن ميله على احدهما يساوي ميله على الآخر



المعطيات

(X) // (Y)

$\overleftrightarrow{AC}$ يقطع (X) في B ويقطع (Y) في C

المطلوب اثباته

ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

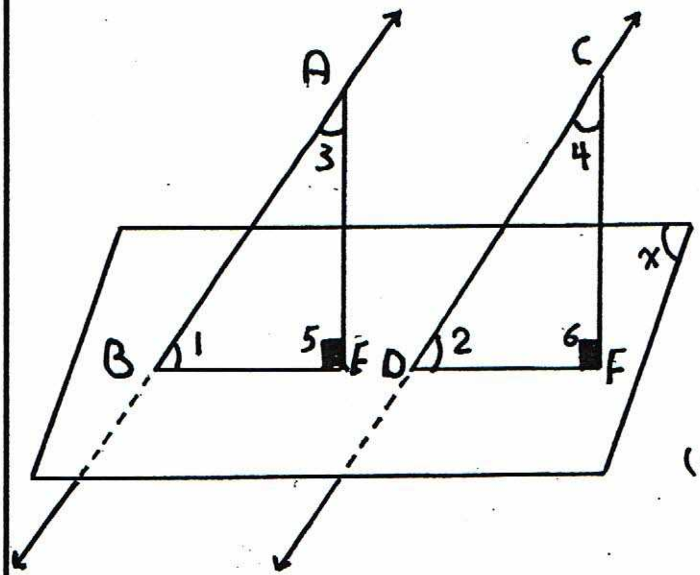
البرهان

نرسم $\overleftrightarrow{AD} \perp (X)$	[يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة]
∵ (Y) // (X)	[معطى]
∴ $\overleftrightarrow{AD} \perp (Y)$ في E	[المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر]
∴ $\overline{BD}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X) $\overline{CE}$ هو مسقط $\overline{AC}$ على (Y)	[تعريف مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ: هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم]
∴ ∢1 هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) ∢2 هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)	[زاوية الميل: هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي]
نعين (Z) بالمستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{AC}$، $\overleftrightarrow{AE}$	[لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما]
∴ $\overline{BD} \parallel \overline{CE}$	[اذا قطع مستويان متوازيان بمستوٍ ثالث فأن مستقيمي التقاطع متوازيان]
∴ m∢1 = m∢2	[بالتناظر]

∴ ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (Y)

و.هـ.م

س3 برهن على أن المستقيمات المتوازية المائلة على مستوٍ الميل نفسه



المعطيات

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ وكل منهما مائلان على (X) في D, B .

المطلوب اثباته

ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{CD}$ على (X)

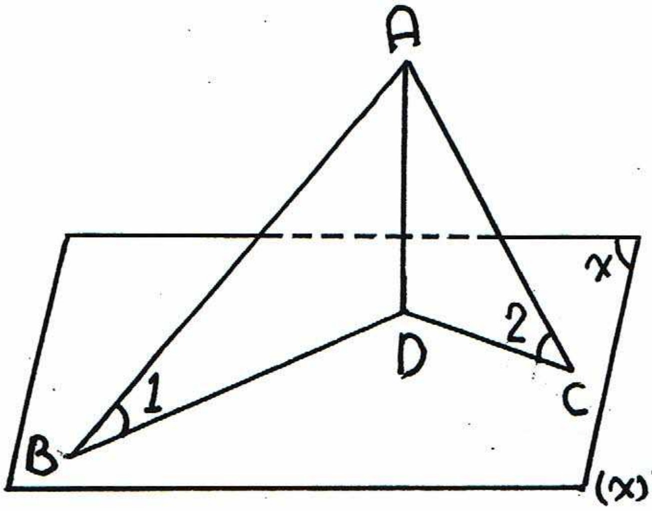
البرهان

العبارات	الأسباب
نرسم $\overleftrightarrow{AE} \perp (X)$ في E نرسم $\overleftrightarrow{CF} \perp (X)$ في F	[يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة]
∴ $\overline{BE}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) $\overline{DF}$ مسقط $\overline{CD}$ على (X)	[مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ: هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم]
∴ $\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) $\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overline{CD}$ على (X)	[زاوية الميل: هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي]
∵ $\overline{AB} // \overline{CD}$	[معطى]
$\overline{AE} // \overline{CF}$	[المستقيمان العمودان على مستوٍ واحد متوازيان]
∴ $m\measuredangle 3 = m\measuredangle 4$	[إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوى قياسهما]
$m\measuredangle 5 = m\measuredangle 6 = 90^\circ$	[المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي]
∴ $m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$	[لأن مجموع زوايا مثلث = 180°]

∴ ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (X) = ميل $\overleftrightarrow{CD}$ على (X)

و.هـ.م

س4 برهن على انه اذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستوٍ معلوم فان اطولهما تكون زاوية ميله على المستوي اصغر من زاوية ميل الآخر عليه



المعطيات

$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ مائلان على (x)

$AB > AC$ ، $A \notin (x)$

المطلوب اثباته

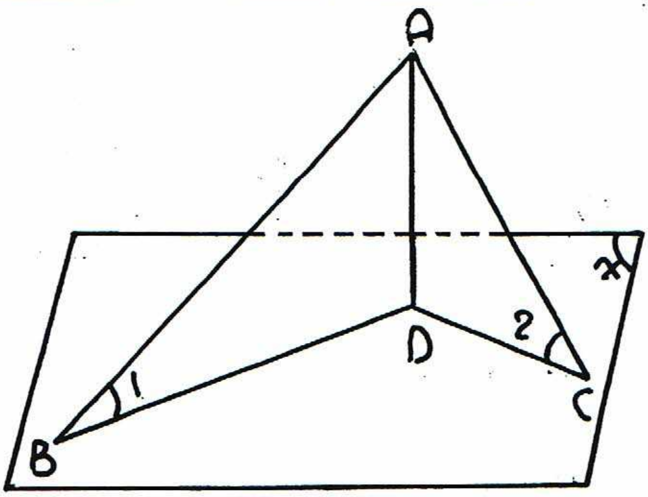
زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (x) أصغر من زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (x)

البرهان

العبارة	السبب
نرسم $\overline{AD} \perp (x)$ في D	[يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة]
$\therefore$ $\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$ على (x) $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$ على (x)	[تعريف مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ: هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم]
$\therefore$ $\measuredangle 1$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x) $\measuredangle 2$ زاوية ميل $\overline{AC}$ على (x)	[زاوية الميل: هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي]
$\therefore$ $\overline{AD} \perp \overline{DB}, \overline{DC}$	[المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي]
$\therefore$ $\triangle\triangle ADB, ADC$ قائما الزاوية في D	
$AB > AC$	[معطى]
$\dfrac{AB}{AD} > \dfrac{AC}{AD}$	[قسمة طرفي المتباينة على المشترك AD]
بقلب النسب $\dfrac{AD}{AB} < \dfrac{AD}{AC}$	[خواص المتباينات]
$\sin\measuredangle 1 < \sin\measuredangle 2$	[لأن $\sin\measuredangle 2 = \dfrac{AD \text{ المقابل}}{AC \text{ الوتر}}$ ، $\sin\measuredangle 1 = \dfrac{AD \text{ المقابل}}{AB \text{ الوتر}}$]
$m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$	

$\therefore$ زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (x) أصغر من زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (x)

س5 برهن على أنه اذا رسم مائلان من نقطة ما الى مستوٍ فأصغرهما ميلاً هو الأصغر



المعطيات

$\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ مائلان على (X)

زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) اصغر من زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)

المطلوب اثباته $AB > AC$

البرهان

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ في D	[يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة]
$\therefore$ $\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$ على (X)	[تعريف مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ: هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العموديين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم]
$\therefore$ $\measuredangle 1$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (X) $\measuredangle 2$ زاوية ميل $\overline{AC}$ على (X)	[زاوية الميل: هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي]
$\therefore$ $\overline{AD} \perp \overline{DB}, \overline{DC}$	[المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستوي]
$\therefore$ $\triangle\triangle ADB, ADC$ قائما الزاوية في D	
$m\measuredangle 1 < m\measuredangle 2$	[معطى]
$\sin\measuredangle 1 < \sin\measuredangle 2$	
$\dfrac{AD}{AB} < \dfrac{AD}{AC}$	[لان $\sin\measuredangle 1 = \dfrac{AD}{AB}$ ، $\sin\measuredangle 2 = \dfrac{AD}{AC}$]
بقلب النسب $\dfrac{AB}{AD} > \dfrac{AC}{AD}$	[خواص المتباينات]

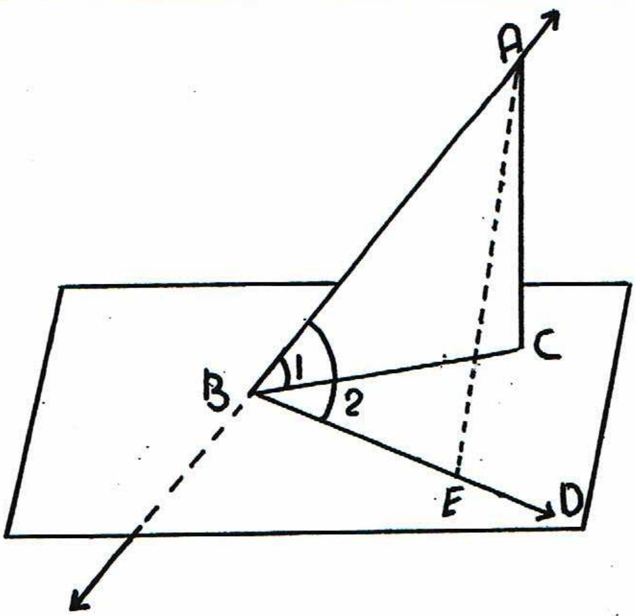
الضرب للمتباينة في AD

$\therefore AB > AC$

و.هـ.م

6

س/ برهن على أن زاوية الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ أصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم وأي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي



المعطيات

$\overleftrightarrow{AB}$ مائل على (X) في B

$\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{BD} \subset (X)$

المطلوب اثباته

$m\angle 1 < m\angle 2$

البرهان

∵ $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) [معطى]

∴ $\overline{AC} \perp (X)$ [تعريف مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العموديين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم]

لتكن $E \in \overline{BD}$ بحيث يكون $\overline{BC} = \overline{BE}$

في ΔΔ ABC , ABE فيهما

$\overline{BC} = \overline{BE}$ [بالعمل]

$\overline{AB}$ [مشترك]

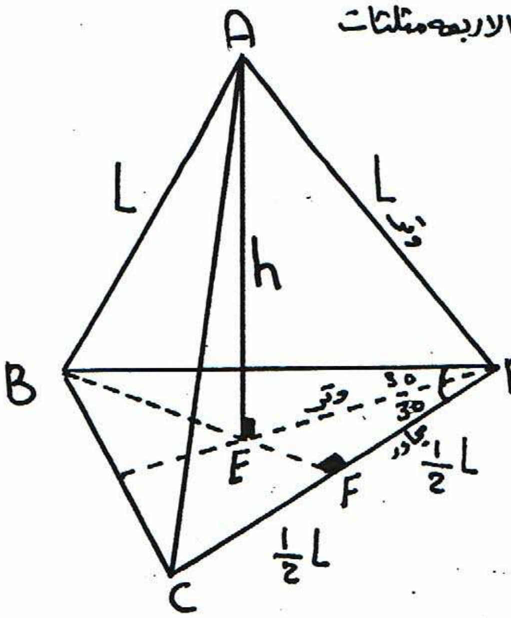
$\overline{AC} < \overline{AE}$ [العمود هو أقصر المستقيمات الواصلة بين نقطة ومستوي]

∴ $m\angle 1 < m\angle 2$ [إذا ساوى ضلعا مثلث ضلعي مثلث آخر واختلف الضلعان الآخران فأصغرهما يقابل أصغر الزاويتين.]

و.هـ.م

س3 برهن على أن حجم ذي الوجوه الاربعة المنتظم والذي طول حرفه = L هو $\frac{\sqrt{2}L^3}{12}$ وحدة مكعبة

* تعريف ذي الوجوه الاربعة المنتظم : هرم ثلاثي قائم منتظم اوجهه الاربعة مثلثات متساوية الاضلاع ومتطابقة



المعطيات

$A-BCD$ هرم ذي وجوه اربعة منتظم

طول حرفه L وحجمه V

المطلوب اثباته

$$V=\frac{\sqrt{2}L^3}{12}$$

البرهان

∵ $\triangle BCD$ متساوي الاضلاع

∴ نرسم الاعمدة المنصفة فتتقاطع في E

وتمثل موقع العمود النازل من A على مركز القاعدة E

في $\triangle DFE$ القائم الزاوية في F

$$\cos 30=\frac{FD \text{ مجاور}}{ED \text{ وتر}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\frac{1}{2}L}{ED}\Rightarrow \sqrt{3}\,ED=L\Rightarrow ED=\frac{L}{\sqrt{3}}$$

في $\triangle AED$ القائم الزاوية في E فيثاغورس $(AE)^2+(ED)^2=(AD)^2$

$$h^2+\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2=L^2$$

$$h^2+\frac{L^2}{3}=L^2\ \Big]\times 3\Rightarrow 3h^2+L^2=3L^2\Rightarrow 3h^2=3L^2-L^2$$

$$3h^2=2L^2\Rightarrow h^2=\frac{2L^2}{3}\overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} h=\frac{\sqrt{2}L}{\sqrt{3}}$$

القاعدة مثلث متساوي الاضلاع ومساحته ثابتة حيث انها تساوي $\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$

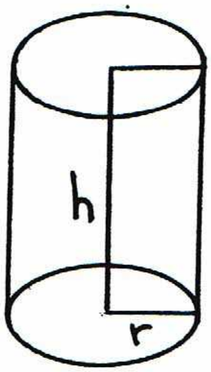
الحجم $=\frac{1}{3}$ (مساحة القاعدة) × (الارتفاع)

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}L^2\right)\left(\frac{\sqrt{2}L}{\sqrt{3}}\right)$$

$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}L^3$$

و.هـ.م

س2/ أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $400\pi\ cm^2$ وحجمها $2000\pi\ cm^3$ أوجد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها



المعطيات

أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $= 400\pi\ cm^2$

وحجمها $= 2000\pi\ cm^3$

المطلوب اثباته

ايجاد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها

البرهان

ليكن ابعاد الاسطوانة r , h

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$2000\pi = r^2 \pi h$$

$$r^2 h = 2000 \text{------} ①$$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$$400\pi = 2r\pi h \,]\div 2\pi$$

$$rh = 200$$

$$h = \frac{200}{r} \text{------} ②$$

نعوض ② في ①

$$r^2\left(\frac{200}{r}\right) = 2000$$

$$200r = 2000 \Rightarrow r = \frac{2000}{200} \Rightarrow r = 10\ cm$$ نصف القطر

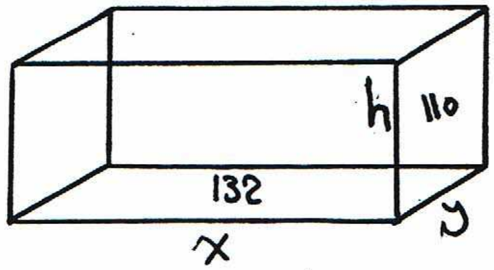
نعوض قيمة r في ②

$$h = \frac{200}{10} \Rightarrow h = 20\ cm$$ الارتفاع

و.هـ.م

تمارين (3-6) للنجيبيعي فقط

س/ اذا كانت المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات = $724\ cm^2$ ومساحة قاعدته = $132\ cm^2$ ومساحة احد اوجهه الجانبية = $110\ cm^2$ اوجد حجمه



المعطيات متوازي سطوح مستطيلة

مساحة الكلية = $724\ cm^2$ ومساحة قاعدته = $132\ cm^2$

ومساحة احد اوجهه الجانبية = $110\ cm^2$

المطلوب اثباته ايجاد حجم متوازي المستطيلات

البرهان

ليكن أبعاد المتوازي x, y, h

مساحة القاعدة = $xy \Rightarrow xy = 132$ -------- (1)

مساحة أحد اوجهه الجانبية

وليكن = $yh \Rightarrow yh = 110$ -------- (2)

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة قاعدتين

= محيط القاعدة × الارتفاع + مساحة قاعدتين

$$724 = (2x + 2y) \times h + 2(xy)$$

$$724 = 2xh + 2yh + 2xy \;]\div 2$$

$$362 = xh + yh + xy$$

$$362 = xh + 110 + 132$$

$$362 - 242 = xh \Rightarrow 120 = xh$$

$xh = 120$ ---- (3) $\Rightarrow x = \frac{120}{h}$

$yh = 110$ ---- (2) $\Rightarrow y = \frac{110}{h}$

$\Rightarrow$ نعوض في (1)

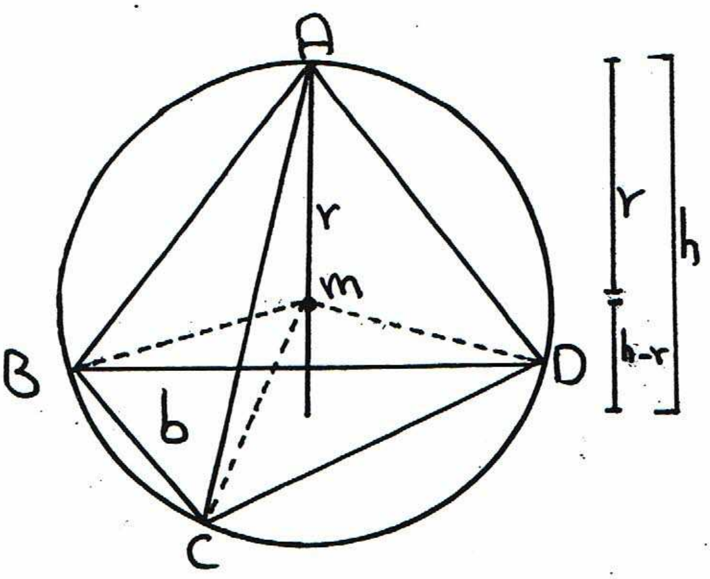
$$\left(\frac{120}{h}\right)\left(\frac{110}{h}\right) = 132 \Rightarrow \frac{13200}{h^2} = \frac{132}{1} \Rightarrow h^2 = 100 \Rightarrow h = 10$$

∴ حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$= 132 \times 10 = 1320\ cm^3$$

و.هـ.م

س4 إذا علمت أنه يمكن رسم كرة خارج ذي الوجوه الاربعة المنتظم برهن أن نصف قطر الكرة $= \frac{3}{4}$ الارتفاع



المعطيات

$A-BCD$ شكل ذي اربع وجوه منتظم مرسوم داخل كرة نصف قطرها r ومركزها m

المطلوب اثباته

$r = \frac{3}{4}h$

البرهان

نصل مركز الكرة m برؤوس الهرم A, B, C, D فيكون الهرم الاصلي قد انقسم الى اربعة اهرامات منتظمة ارتفاع كل منها $h-r$ ومساحة القاعدة b

∴ الاهرامات الاربعة متساوية الحجم (لانها متساوية بمساحة القاعدة والارتفاع)

∴ حجم الهرم الاصلي $A-BCD$ $= 4(m-BCD)$ (اي حجم هرم صغير وليكن)

$$\frac{1}{3}bh = 4\left[\frac{1}{3}b(h-r)\right]$$

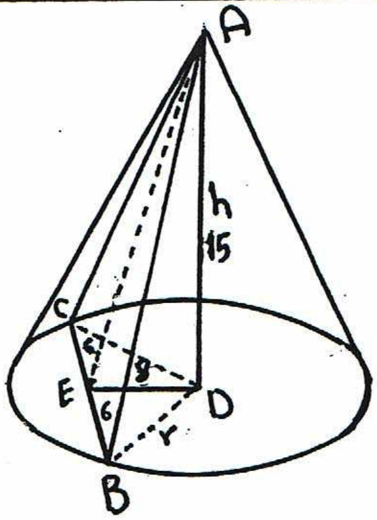
$$h = 4(h-r)$$

$$h = 4h - 4r$$

$$4r = 4h - h \Rightarrow 4r = 3h \Rightarrow r = \frac{3}{4}h$$

و.هـ.م

س5 مخروط دائري قائم مرّ برأسه مستوٍ فقطع قاعدته بقطعة مستقيم تبعد عن مركز القاعدة بمقدار 8cm فإذا كانت مساحة المقطع $= 102\ cm^2$ وارتفاع المخروط $= 15\ cm$ أحسب ① حجمه ② مساحته الجانبية ③ مساحته الكلية .



المعطيات

مخروط دائري قائم ارتفاعه 15cm مرّ برأسه A

المستوي (ABC) قطع القاعدة بالمستقيم $\overline{BC}$

$DE = 8cm$ ومساحة المقطع $(ABC) = 102cm^2$

المطلوب إثباته إيجاد ① حجم المخروط

② المساحة الجانبية ③ المساحة الكلية

البرهان

في $\triangle ADE$ القائم في D [المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي]

$(AE)^2 = (AD)^2 + (DE)^2$ فيثاغورس

$(AE)^2 = (15)^2 + (8)^2 \Rightarrow (AE)^2 = 289 \Rightarrow AE = 17$

$\because \overline{AD} \perp$ (مستوي القاعدة)

$\overline{ED} \perp \overline{BC}$ [بعد نقطة عن مستقيم يكون عمودي]

$\therefore \overline{AE} \perp \overline{BC}$ [مبرهنة الأعمدة الثلاثة]

أي أن $\overline{AE}$ يمثل ارتفاع المثلث ABC

مساحة $\triangle ABC = \frac{1}{2}(BC)(AE) \Rightarrow 102 = \frac{1}{2}(BC)(17)] \times 2$

$204 = (BC)(17) \Rightarrow BC = 12\ cm$

$EB = EC = 6$ [العمود النازل من مركز الدائرة على وتر فيها ينصفه]

في $\triangle BED$ القائم في E

$(BD)^2 = (ED)^2 + (BE)^2$ فيثاغورس

$(BD)^2 = (8)^2 + (6)^2 \Rightarrow (BD)^2 = 100 \Rightarrow BD = 10cm = r$ نصف قطر قاعدة المخروط

① الحجم $= \frac{1}{3} r^2 \pi h \Rightarrow V = \frac{1}{3}(10)^2 \pi (15) = 100\pi(3) = 500\pi\ cm^3$

في $\triangle ADB$ القائم في D

② $(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$

$(AB)^2 = (15)^2 + (10)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 325 \Rightarrow AB = \sqrt{325} = \sqrt{25 \times 13}$

$\therefore AB = 5\sqrt{13} = \ell$ والذي يمثل الارتفاع الجانبي للمخروط

يتبع ⟵

المساحة الجانبية $A = r\ell\pi$

$$A = (10)(5\sqrt{13})\pi = 50\sqrt{13}\,\pi \ cm^2$$

③ المساحة الكلية $A =$ المساحة الجانبية + مساحة القاعدة $(r^2\pi)$

$$= 50\sqrt{13}\,\pi + (10)^2\pi$$

$$= (50\sqrt{13}\,\pi + 100\pi)\ cm^3$$

و . هـ . م

استاذ عبد الكريم جبل ٠٧٨٠٣٠٠٢١٤٠

تمت بعونه تعالى

للمزيد من الملازم والدروس وكل ما يخص طلبة السادس الأعدادي زورونا على مواقع التواصل الأجتماعي ...

رحلة التفوق في السادس

رحلة التفوق في السادس

telegram.me/A_M_Z_F

رحلة التفوق في السادس

www.instagram.com/rt_edu

رحلة التفوق في السادس

عطاء بلا حدود